# 2021 年全国硕士研究生招生考试

## 数 学 (二)

(科目代码:302)

**一、选择题:1～10 小题,每小题 5 分,共 50 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.**

1. 当 $x \to 0$ 时,$\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)\mathrm{d}t$ 是 $x^7$ 的

A. 低阶无穷小. B. 等价无穷小.

C. 高阶无穷小. D. 同阶但非等价无穷小.

2. 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 处

A. 连续且取得极大值. B. 连续且取得极小值.

C. 可导且导数等于零. D. 可导且导数不为零.

3. 有一圆柱体,底面半径与高随时间变化的速率分别为 2 cm/s,$-3$ cm/s,当底面半径为 10 cm,高为 5 cm 时,圆柱体的体积与表面积随时间变化的速率分别为

A. $125\pi\ \mathrm{cm^3/s}, 40\pi\ \mathrm{cm^2/s}$. B. $125\pi\ \mathrm{cm^3/s}, -40\pi\ \mathrm{cm^2/s}$.

C. $-100\pi\ \mathrm{cm^3/s}, 40\pi\ \mathrm{cm^2/s}$. D. $-100\pi\ \mathrm{cm^3/s}, -40\pi\ \mathrm{cm^2/s}$.

4. 设函数 $f(x)=ax-b\ln x\,(a>0)$ 有两个零点,则 $\dfrac{b}{a}$ 的取值范围是

A. $(e,+\infty)$. B. $(0,e)$.

C. $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$. D. $\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$.

5. 设函数 $f(x)=\sec x$ 在 $x=0$ 处的二次泰勒多项式为 $1+ax+bx^2$,则

A. $a=1,b=-\dfrac{1}{2}$. B. $a=1,b=\dfrac{1}{2}$.

C. $a=0,b=-\dfrac{1}{2}$. D. $a=0,b=\dfrac{1}{2}$.

6. 设函数 $f(x,y)$ 可微,且 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2$,$f(x,x^2)=2x^2\ln x$,则 $\mathrm{d}f(1,1)=$

A. $\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$. B. $\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$. C. $\mathrm{d}y$. D. $-\mathrm{d}y$.

7. 设函数 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上连续,则$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x =$

A. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{2n}$.　　B. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$.

C. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\dfrac{k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$.　　D. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\dfrac{k}{2n}\right)\dfrac{2}{n}$.

8. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为

A. 2,0.　　B. 1,1.　　C. 2,1.　　D. 1,2.

9. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表出,则

A. $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解.　　B. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解.

C. $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.　　D. $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解.

10. 已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-1&1\\-1&2&-5\end{pmatrix}$. 若存在下三角可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和上三角可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{PAQ}$ 为对角矩阵,则 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 分别取

A. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　B. $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

C. $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　D. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$.

## 二、填空题:11 ~ 16 小题,每小题 5 分,共 30 分.

11. $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|3^{-x^2}\mathrm{d}x=$________.

12. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程$\begin{cases}x=2\mathrm{e}^t+t-1,\\y=4(t-1)\mathrm{e}^t+t^2\end{cases}$确定,则$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=$________.

13. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程$(x+1)z+y\ln z-\arctan 2xy=1$ 确定,则$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,2)}=$________.

14. 已知函数 $f(t)=\int_1^{t^2}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{t}\sin\dfrac{x}{y}\mathrm{d}y$,则 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=$________.

15. 微分方程 $y'''-y=0$ 的通解 $y=$________.

16. 多项式 $f(x)=\begin{vmatrix}x&x&1&2x\\1&x&2&-1\\2&1&x&1\\2&-1&1&x\end{vmatrix}$ 的 $x^3$ 项的系数为________.

三、解答题:17 ~ 22 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.(本题满分 10 分)

求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\int_0^x e^{t^2}\,dt}{e^x-1}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

18.(本题满分 12 分)

设函数 $f(x)=\dfrac{x|x|}{1+x}$,求 $f(x)$ 的凹凸区间及渐近线.

19.(本题满分 12 分)

设函数 $f(x)$ 满足$\int\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=\dfrac{1}{6}x^2-x+C$,$L$ 为曲线 $y=f(x)(4\leqslant x\leqslant 9)$. 记 $L$ 的弧长为 $s$,$L$ 绕 $x$ 轴旋转一周所形成的曲面面积为 $A$,求 $s$ 和 $A$.

20.(本题满分 12 分)

设函数 $y=y(x)(x>0)$ 是微分方程 $xy'-6y=-6$,又满足 $y(\sqrt{3})=10$.

(1) 求 $y(x)$;

(2) 设 $P$ 为曲线 $y=y(x)$ 上的一点,曲线 $y=y(x)$ 在点 $P$ 处的法线在 $y$ 轴上的截距为 $I_P$. 为使 $I_P$ 最小,求 $P$ 的坐标.

21.(本题满分 12 分)

曲线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$ 与 $x$ 轴围成区域 $D$,求 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

22.(本题满分 12 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\1&a&b\end{pmatrix}$ 仅有两个不同的特征值,若 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵,求 $a$,$b$ 的值,并求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

# 2021 年数学(二)答案解析

## 一、选择题

1.【答案】B

【解析】当 $x \to 0$ 时，$\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)\mathrm{d}t \sim \int_0^{x^2} t^3 \mathrm{d}t = \frac{1}{4}x^8$，故 $\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)\mathrm{d}t$ 是 $x^7$ 的高阶无穷小.

2.【答案】D

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1$，因此函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2},$$

因此函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且导数不为零.

3.【答案】C

【解析】设圆柱体的底面半径 $r=r(t)$，高 $h=h(t)$，则体积 $V=\pi r^2 h$，表面积 $S=2\pi rh+2\pi r^2$.

且 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=2$，$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=-3$，当 $r=10$，$h=5$ 时，

$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\pi r^2\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}+2\pi rh\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-100\pi$，$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=2\pi r\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}+2\pi h\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}+4\pi r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=40\pi$.

4.【答案】A

【解析】令 $g(x)=\frac{x}{\ln x}-\frac{b}{a}$，很显然 $g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0$，因此只需对 $g(x)$ 进行考虑.

$g'(x)=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$，令 $g'(x)=0$，解得 $x=e$，

并且当 $0<x<e$ 时，$g'(x)<0$；当 $x>e$ 时，$g'(x)>0$，即 $g(x)$ 在 $x=e$ 处取得最小值.

因此，若函数 $f(x)$ 有两个零点，则 $g(e)<0$，即 $\frac{b}{a}>e$.

5.【答案】D

【解析】由泰勒公式可得 $f'(0)=a$，$f''(0)=2b$.

经计算得 $f'(x)=\sec x\tan x$，$f''(x)=\sec x\tan^2 x+\sec^3 x$，则 $a=0$，$b=\frac{1}{2}$.

6.【答案】C

【解析】方程 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2$ 两边同时对 $x$ 求导，得

$$f_1'(x+1,e^x)+e^x f_2'(x+1,e^x)=(3x+1)(x+1),$$

将 $x=0$ 代入得 $f_1'(1,1)+f_2'(1,1)=1$.

方程 $f(x,x^2)=2x^2\ln x$ 两边同时对 $x$ 求导，得 $f'_1(x,x^2)+2xf'_2(x,x^2)=4x\ln x+2x$，

将 $x=1$ 代入得 $f'_1(1,1)+2f'_2(1,1)=2$，

根据所得两个方程解得 $f'_1(1,1)=0,f'_2(1,1)=1$，因此 $\mathrm{d}f(1,1)=\mathrm{d}y$.

7.【答案】B

【解析】将区间$[0,1]$等分成 $n$ 份，并且在每份的中点上取值，则由定积分的定义可得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\frac{1}{n}.$$

8.【答案】B

【解析】化简二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_2^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_3x_1$，则其系数矩阵为

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，从而其特征方程为 $\lambda(\lambda+1)(\lambda-3)=0$，解得其特征值为 $0,-1,3$，

因此二次型的正、负惯性指数均为 1.

9.【答案】D

【解析】由题意可得，存在矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BP}$，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，

因此 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解.

10.【答案】C

【解析】经计算可得，$\boldsymbol{PAQ}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-1&1\\-1&2&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

二、填空题

11.【答案】$\dfrac{1}{\ln 3}$

【解析】$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|x|3^{-x^2}\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}x3^{-x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{\ln 3}3^{-x^2}\bigg|_0^{+\infty}=\frac{1}{\ln 3}$.

12.【答案】$\dfrac{2}{3}$

【解析】经计算，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=2t$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)}{\mathrm{d}t}}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\dfrac{2}{2\mathrm{e}^t+1}$，因此$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\bigg|_{t=0}=\dfrac{2}{3}$.

13.【答案】1

【解析】将 $x=0,y=2$ 代入方程得 $z=1$.

方程两边同时对 $x$ 求导得 $z+(x+1)\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{y}{z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{2y}{1+(2xy)^2}=0$，

将 $x=0,y=2,z=1$ 代入其中得$\dfrac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(0,2)}=1$.

14.【答案】$\frac{\pi}{2}\cos\frac{2}{\pi}$

【解析】将二次积分的 $X$ 型积分区域转化为 $Y$ 型区域 $D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant y^2,1\leqslant y\leqslant t\}$，

则 $f(t)=\int_1^t \mathrm{d}y\int_1^{y^2}\sin\frac{x}{y}\mathrm{d}x=\int_1^t y\left(\cos\frac{1}{y}-\cos y\right)\mathrm{d}y$，

从而 $f'(t)=t\left(\cos\frac{1}{t}-\cos t\right)$，因此 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\cos\frac{2}{\pi}$.

15.【答案】$C_1\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$（$C_1,C_2,C_3$ 为任意常数）

【解析】微分方程的特征方程为 $\lambda^3-1=0$，

解得其特征根为 $\lambda_1=1,\lambda_2=\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2},\lambda_3=\frac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$，

因此微分方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$（$C_1,C_2,C_3$ 为任意常数）.

16.【答案】$-5$

【解析】行列式按第一行展开，则展开式中包含 $x^3$ 项的为 $-x^3,-4x^3$，因此 $x^3$ 的系数为 $-5$.

三、解答题

17.【解析】由洛必达法则及泰勒展开得

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^x-1}+\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{e}^x}+\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\mathrm{e}^x+1}{(\mathrm{e}^x-1)\sin x}$$

$$=1+\lim_{x\to0}\frac{[x+o(x)]-\left[1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right]+1}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

18.【解析】由题意可知，$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{1+x}, & x\geqslant0,\\ \frac{-x^2}{1+x}, & x<0\text{ 且 }x\neq-1.\end{cases}$

故 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$，因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}, & x>0,\\ \frac{-x(x+2)}{(x+1)^2}, & x<0\text{ 且 }x\neq-1,\end{cases}\qquad f''(x)=\begin{cases}\frac{2}{(x+1)^3}, & x>0,\\ -\frac{2}{(x+1)^3}, & x<0\text{ 且 }x\neq-1.\end{cases}$$

当 $x<-1$ 时，$f''(x)>0$；当 $-1<x<0$ 时，$f''(x)<0$；当 $x>0$ 时，$f''(x)>0$.

因此曲线的凹区间为 $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$，凸区间为 $(-1,0)$.

$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\infty$，故垂直渐近线为 $x=-1$；

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{1+x}=1$且$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{1+x}=-1$，故斜渐近线为$y=x-1$；

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x}{1+x}=-1$ 且 $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x]=1$，故斜渐近线为 $y=-x+1$.

19.【解析】方程两边同时对 $x$ 求导可得$\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}=\dfrac{x}{3}-1$，

故 $f(x)=\dfrac{1}{3}x\sqrt{x}-\sqrt{x}$. 则

$$s=\int_4^9\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_4^9\sqrt{1+\frac{1}{4}(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})^2}\,dx=\int_4^9\frac{1}{2}(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})\,dx=\frac{22}{3},$$

$$A=\int_4^9 2\pi y\,ds=2\pi\int_4^9\left(\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4}(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})^2}=\int_4^9\pi\left(\frac{x^2}{3}-\frac{2}{3}x-1\right)dx=\frac{425}{9}\pi.$$

20.【解析】(1) 由题意可知 $x\dfrac{dy}{dx}=6(y-1)$.

变量分离得$\dfrac{dy}{y-1}=\dfrac{6dx}{x}$，

即 $\ln|y-1|=6\ln|x|+C'$，因此有 $y=Cx^6+1$.

由 $y(\sqrt{3})=10$ 得 $C=\dfrac{1}{3}$，故 $y=\dfrac{1}{3}x^6+1$.

(2) 不妨设点 $P\left(a,\dfrac{1}{3}a^6+1\right)$，则 $P$ 点处的切线斜率为$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=a}=2a^5$，则法线斜率为$-\dfrac{1}{2a^5}$.

故过点 $P$ 的法线方程为 $y-\left(\dfrac{1}{3}a^6+1\right)=-\dfrac{1}{2a^5}(x-a)$，

则 $I_P=\dfrac{1}{2a^4}+\dfrac{1}{3}a^6+1$.

令 $f(x)=\dfrac{1}{2x^4}+\dfrac{1}{3}x^6+1$，

则 $f'(x)=-2\dfrac{1}{x^5}+2x^5=\dfrac{2(x^{10}-1)}{x^5}$，由 $f'(x)=0$ 得 $x=1(x=-1$ 舍去)，

故当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$.

因此 $f(x)$ 的极小值点为 $x=1$，此时 $I_P$ 最小，点 $P$ 坐标为$\left(1,\dfrac{4}{3}\right)$.

21.【解析】令$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$ 则 $D=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,r^2\leqslant\cos 2\theta,0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{4}\right\}$. 故

$$I=\iint_D xy\,dx\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}}r^2\cos\theta\sin\theta\cdot r\,dr\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4}\cos\theta\sin\theta\cos^2 2\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2\theta\cos^2 2\theta}{8}d\theta=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 2\theta}{16}d(\cos 2\theta)=\frac{1}{48}.$$

22.【解析】

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 0\\ -1 & \lambda-2 & 0\\ -1 & -a & \lambda-b\end{vmatrix}=(\lambda-b)\left[(\lambda-2)^2-1\right]=(\lambda-b)(\lambda-3)(\lambda-1)=0,$$

解得 $A$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=3,\lambda_3=b$，由于 $A$ 仅有两个不同的特征值，故 $b=1$ 或 $b=3$.

(1) 若 $b=1$，

当 $\lambda=1$ 时，$E-A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ -1 & -a & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 0 & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，

故当且仅当 $a=1$ 时，$r(E-A)=1$，$A$ 可对角化.

由 $(E-A)X=0$ 解得对应的两个线性无关的特征向量为 $X_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$，$X_2=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$；

当 $\lambda=3$ 时，$3E-A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，

由 $(3E-A)X=0$ 解得对应的特征向量为 $X_3=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$.

令 $P=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$，则有 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

(2) 若 $b=3$，

当 $\lambda=3$ 时，$3E-A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & -a & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & -1-a & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，

故当且仅当 $a=-1$ 时，$r(3E-A)=1$，$A$ 可对角化.

由 $(3E-A)X=0$ 解得对应的两个线性无关的特征向量为 $X_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$，$X_2=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$；

当 $\lambda=1$ 时，$E-A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，

由 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 解得对应特征向量为 $\boldsymbol{X}_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$，则有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.