2021年全国硕士研究生招生考试

数　学　(三)

(科目代码:303)

一、选择题:1～10小题,每小题5分,共50分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

1. 当 $x \to 0$ 时,$\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)dt$ 是 x^7 的

A. 低阶无穷小.　　B. 等价无穷小.

C. 高阶无穷小.　　D. 同阶但非等价无穷小.

2. 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处

A. 连续且取得极大值.　　B. 连续且取得极小值.

C. 可导且导数等于零.　　D. 可导且导数不为零.

3. 设函数 $f(x)=ax-b\ln x(a>0)$ 有两个零点,则 $\dfrac{b}{a}$ 的取值范围是

A. $(e,+\infty)$.　　B. $(0,e)$.　　C. $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$.　　D. $\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$.

4. 设函数 $f(x,y)$ 可微,且 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2$,$f(x,x^2)=2x^2\ln x$,则 $df(1,1)=$

A. $dx+dy$.　　B. $dx-dy$.

C. dy.　　D. $-dy$.

5. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为

A. 2,0.　　B. 1,1.　　C. 2,1.　　D. 1,2.

6. 已知 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 为4阶正交矩阵,若矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^T\\ \boldsymbol{\alpha}_2^T\\ \boldsymbol{\alpha}_3^T\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,$k$ 表示任意常数,则 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=$

A. $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4+k\boldsymbol{\alpha}_1$.　　B. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4+k\boldsymbol{\alpha}_2$.

C. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4+k\boldsymbol{\alpha}_3$.　　D. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+k\boldsymbol{\alpha}_4$.

7. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-1&1\\-1&2&-5\end{pmatrix}$. 若存在下三角可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和上三角可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{PAQ}$ 为对角矩阵，则 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$ 分别取

A. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$.

B. $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

C. $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$.

D. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$.

8. 设 A，B 为随机变量，且 $0<P(B)<1$，下列命题中为假命题的是

A. 若 $P(A|B)=P(A)$，则 $P(A|\overline{B})=P(A)$.

B. 若 $P(A|B)>P(A)$，则 $P(\overline{A}|\overline{B})>P(\overline{A})$.

C. 若 $P(A|B)>P(A|\overline{B})$，则 $P(A|B)>P(A)$.

D. 若 $P(A|A\cup B)>P(\overline{A}|A\cup B)$，则 $P(A)>P(B)$.

9. 设 (X_1,Y_1)，(X_2,Y_2)，$\cdots$，(X_n,Y_n) 为来自总体 $N(\mu_1,\mu_1;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$ 的简单随机样本，令 $\theta=\mu_1-\mu_2$，$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，$\overline{Y}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}Y_i$，$\hat{\theta}=\overline{X}-\overline{Y}$，则

A. $E(\hat{\theta})=\theta,D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$.

B. $E(\hat{\theta})=\theta,D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$.

C. $E(\hat{\theta})\neq\theta,D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$.

D. $E(\hat{\theta})\neq\theta,D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$.

10. 设总体 X 的概率分布为 $P\{X=1\}=\dfrac{1-\theta}{2}$，$P\{X=2\}=P\{X=3\}=\dfrac{1+\theta}{4}$，利用来自总体 X 的样本值 1，3，2，2，1，3，1，2 可得 θ 的最大似然估计值为

A. $\dfrac{1}{4}$.　　B. $\dfrac{3}{8}$.　　C. $\dfrac{1}{2}$.　　D. $\dfrac{5}{8}$.

二、填空题：11 ～ 16 小题，每小题 5 分，共 30 分.

11. 若 $y=\cos \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=$ ________.

12. $\displaystyle\int_{\sqrt{5}}^{5}\frac{x}{\sqrt{|x^2-9|}}\mathrm{d}x=$ ________.

13. 设平面区域 D 由曲线 $y=\sqrt{x}\sin \pi x\ (0\leqslant x\leqslant 1)$ 与 x 轴围成，则 D 绕 x 轴旋转所围成的旋转体体积为________.

14. 差分方程 $\Delta y_t = t$ 的通解为 $y_t =$ ________.

15. 多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 2x \\ 1 & x & 2 & -1 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 2 & -1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 的 x^3 项的系数为________.

16. 甲、乙两个盒子中各装有 2 个红球和 2 个白球，先从甲盒中任取一球，观察颜色后放入乙盒中，再从乙盒中任取一球. 令 X,Y 分别表示从甲盒和乙盒中取到的红球个数，则 X 与 Y 的相关系数为________.

三、解答题：17 ～ 22 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本题满分 10 分）

已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left[a\arctan\dfrac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]$ 存在，求 a 的值.

18.（本题满分 12 分）

求函数 $f(x,y)=2\ln|x|+\dfrac{(x-1)^2+y^2}{2x^2}$ 的极值.

19.（本题满分 12 分）

设有界区域 D 是圆 $x^2+y^2=1$ 和直线 $y=x$ 以及 x 轴在第一象限围成的部分，计算二重积分 $\iint\limits_D e^{(x+y)^2}(x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

20.（本题满分 12 分）

设 n 为正整数，$y=y_n(x)$ 是微分方程 $xy'-(n+1)y=0$ 满足条件 $y_n(1)=\dfrac{1}{n(n+1)}$ 的解.

(1) 求 $y_n(x)$；

(2) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n(x)$ 的收敛域及和函数.

21.（本题满分 12 分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\1&a&b\end{pmatrix}$ 仅有两个不同的特征值，若 A 相似于对角矩阵. 求 a,b 的值，并求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

22.（本题满分 12 分）

在区间$(0,2)$上随机取一点，将该区间分成两段，较短的一段长度记为 X，较长一段的长度记为 Y，令 $Z=\dfrac{Y}{X}$.

(1) 求 X 的概率密度；

(2) 求 Z 的概率密度.

(3) 求 $E\left(\dfrac{X}{Y}\right)$.

2021年数学(三)答案解析

一、选择题

1.【答案】C

【解析】当 $x\to 0$ 时，$\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)\,dt\sim\int_0^{x^2}t^3\,dt=\frac{1}{4}x^8$，故 $\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)dt$ 是 x^7 的高阶无穷小.

2.【答案】D

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$，因此函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2},$$

因此函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且导数不为零.

3.【答案】A

【解析】令 $g(x)=\frac{x}{\ln x}-\frac{b}{a}$，很显然 $g(x)=0\Leftrightarrow f(x)=0$，因此只需对 $g(x)$ 进行考虑.

$g'(x)=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$，令 $g'(x)=0$，解得 $x=e$，

并且当 $0<x<e$ 时，$g'(x)<0$；当 $x>e$ 时，$g'(x)>0$，即 $g(x)$ 在 $x=e$ 处取得最小值，

因此，若函数 $f(x)$ 有两个零点，则 $g(e)<0$，即 $\frac{b}{a}>e$.

4.【答案】C

【解析】方程 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2$ 两边同时对 x 求导，得

$$f_1'(x+1,e^x)+e^xf_2'(x+1,e^x)=(3x+1)(x+1),$$

将 $x=0$ 代入得 $f_1'(1,1)+f_2'(1,1)=1$.

方程 $f(x,x^2)=2x^2\ln x$ 两边同时对 x 求导，得 $f_1'(x,x^2)+2xf_2'(x,x^2)=4x\ln x+2x$，

将 $x=1$ 代入得 $f_1'(1,1)+2f_2'(1,1)=2$，

根据所得两个方程解得 $f_1'(1,1)=0$，$f_2'(1,1)=1$，因此 $df(1,1)=dy$.

5.【答案】B

【解析】化简二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_2^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_3x_1$，则其系数矩阵为

$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，从而其特征方程为 $\lambda(\lambda+1)(\lambda-3)=0$，解得其特征值为 $0,-1,3$，

因此二次型的正、负惯性指数均为 1.

6.【答案】D

【解析】由题意可得 $r(\boldsymbol{B})=3$，则 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中只有一个向量.

由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，则 $\boldsymbol{\alpha}_i^T\boldsymbol{\alpha}_j=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j\end{cases}(i,j=1,2,3,4)$，

因此 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{\alpha}_4$，且 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个特解为 $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

故 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+k\boldsymbol{\alpha}_4$.

7.【答案】C

【解析】经计算可得，$\boldsymbol{PAQ}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\2&-1&1\\-1&2&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

8.【答案】D

【解析】$P(A|A\cup B)=\dfrac{P(A(A+B))}{P(A\cup B)}>P(\overline{A}|A\cup B)=\dfrac{P(\overline{A}(A+B))}{P(A\cup B)}$，

则 $P(A)>P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)$，无法推出 $P(A)>P(B)$.

9.【答案】B

【解析】$E(\hat{\theta})=E(\overline{X}-\overline{Y})=E(\overline{X})-E(\overline{Y})=\mu_1-\mu_2=\theta$，

$$D(\hat{\theta})=\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i-\sum_{i=1}^{n}Y_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i-Y_i)$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}[D(X_i)+D(Y_i)-2\mathrm{Cov}(X_i,Y_i)]=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}.$$

10.【答案】A

【解析】根据题意可得，随机变量 X 的似然函数为

$$L(\theta)=P^3\{X=1\}P^3\{X=2\}P^2\{X=3\}=\left(\frac{1-\theta}{2}\right)^3\left(\frac{1+\theta}{4}\right)^5,$$

则对数似然函数为

$$\ln L(\theta)=3\ln(1-\theta)+5\ln(1+\theta)-3\ln 2-5\ln 4.$$

由 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=-\dfrac{3}{1-\theta}+\dfrac{5}{1+\theta}=0$ 得 $\theta=\dfrac{1}{4}$，因此 θ 的最大似然估计值为 $\dfrac{1}{4}$.

二、填空题

11.【答案】$\dfrac{1}{2\mathrm{e}}\sin\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

【解析】经计算，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\sin \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\cdot \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\cdot\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$，因此 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=\dfrac{1}{2\mathrm{e}}\sin\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

12.【答案】6

【解析】$\displaystyle\int_{\sqrt{5}}^{5}\frac{x}{\sqrt{|x^2-9|}}\mathrm{d}x=\int_{\sqrt{5}}^{3}\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\mathrm{d}x+\int_{3}^{5}\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}\mathrm{d}x$

$$=-\sqrt{9-x^2}\Big|_{\sqrt{5}}^{3}+\sqrt{x^2-9}\Big|_{3}^{5}=6.$$

13.【答案】$\frac{\pi}{4}$

【解析】$V=\pi\int_0^1 y^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^1 x\sin^2\pi x\,\mathrm{d}x\xlongequal{t=\pi x}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}t\sin^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}t(1-\cos 2t)\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}$.

14.【答案】$c+\frac{1}{2}t(t-1)$(c 为任意常数)

【解析】原差分方程对应的齐次差分方程 $\Delta y_t=0$ 的通解为 $y=C$(C 为任意常数).

设 $y_t^*=t(at+b)$ 为原差分方程的特解,将 y_t^* 代入原方程中解得 $a=\frac{1}{2},b=-\frac{1}{2}$,

因此差分方程的通解为 $y_t=C+\frac{1}{2}t(t-1)$(C 为任意常数).

15.【答案】-5

【解析】行列式按第一行展开,则展开式中包含 x^3 项的为 $-x^3,-4x^3$,因此 x^3 的系数为 -5.

16.【答案】$\frac{1}{5}$

【解析】由题意可得 (X,Y) 的联合分布为

(X,Y)	$(1,0)$	$(1,1)$	$(0,0)$	$(0,1)$
p	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$

X 的分布为

X	0	1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Y 的分布同 X.

则 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{3}{10}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{20},D(X)=D(Y)=\frac{1}{4}$,

因此 $\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=\frac{1}{5}$.

三、解答题

17.【解析】$\lim\limits_{x\to0^+}\left[a\cdot\arctan\frac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]=\lim\limits_{x\to0^+}\left[\frac{\pi}{2}a+\mathrm{e}^{\frac{\ln(1+x)}{x}}\right]=\frac{\pi}{2}a+\mathrm{e}$;

$\lim\limits_{x\to0^-}\left[a\cdot\arctan\frac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]=\lim\limits_{x\to0^-}\left[-\frac{\pi}{2}a+\mathrm{e}^{\frac{\ln(1-x)}{x}}\right]=-\frac{\pi}{2}a+\mathrm{e}^{-1}$.

由于$\lim\limits_{x\to0}\left[a\cdot\arctan\frac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]$存在,故$\frac{\pi}{2}a+\mathrm{e}=-\frac{\pi}{2}a+\mathrm{e}^{-1}$,

因此 $a=\frac{\frac{1}{\mathrm{e}}-\mathrm{e}}{\pi}$.

18.【解析】由$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{2}{x}+\dfrac{x-1-y^2}{x^3}=0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{y}{x^2}=0,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=-1,\\ y=0\end{cases}$或$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2},\\ y=0.\end{cases}$

故$(-1,0)$和$\left(\dfrac{1}{2},0\right)$为$f(x,y)$的驻点.

由于

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{-2x^2-2x+3+3y^2}{x^4},B=-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-\frac{2y}{x^3},C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{1}{x^2},$$

在点$(-1,0)$处，$A=3,B=0,C=1$，由$AC-B^2=3>0,A>0$可知$(-1,0)$为极小值点，极小值为$f(-1,0)=2$；

在点$\left(\dfrac{1}{2},0\right)$处，$A=24,B=0,C=4$，由$AC-B^2=96>0,A>0$可知$\left(\dfrac{1}{2},0\right)$为极小值点，

极小值为$f\left(\dfrac{1}{2},0\right)=\dfrac{1}{2}-2\ln 2$.

19.【解析】令$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$ 则$D=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,0\leqslant r\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{4}\right\}$，则

$$\text{原式}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^1 e^{r^2(\cos\theta+\sin\theta)^2}r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)r\,dr\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^1 e^{r^2(1+\sin 2\theta)}r^3\cos 2\theta\,dr\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^1 e^{r^2(1+\sin 2\theta)}r^3\,d(\sin 2\theta)\,dr\xlongequal{t=\sin 2\theta}\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 r^3\cdot e^{r^2(1+t)}\,dt\,dr$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 r^3\cdot\frac{1}{r^2}e^{r^2(1+t)}\,d\left[r^2(1+t)\right]dr=\frac{1}{2}\int_0^1 r^3\cdot\frac{1}{r^2}\left(e^{2r^2}-e^{r^2}\right)dr$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1\left(e^{2r^2}-e^{r^2}\right)d(r^2)=\left(\frac{1}{8}e^{2r^2}-\frac{1}{4}e^{r^2}\right)\bigg|_0^1=\frac{1}{8}e^2-\frac{1}{4}e+\frac{1}{8}=\frac{1}{8}(e-1)^2.$$

20.【解析】(1) 由题意可知 $x\dfrac{dy}{dx}=(n+1)y$，

变量分离得
$$\frac{dy}{y}=(n+1)\frac{dx}{x}.$$

积分得 $y_n=C_nx^{n+1}$. 由 $y_n(1)=\dfrac{1}{n(n+1)}$ 知 $C_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$，

故 $y_n(x)=\dfrac{1}{n(n+1)}x^{n+1}$.

(2) 对于级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}$，$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)}=1$，故收敛半径$R=1$.

当$x=\pm1$时，级数收敛，故收敛域为$[-1,1]$.

当$x\in[-1,1)$时，令$S(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}$，

则 $S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$，

故$S'(x)=\int\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x=-\ln(1-x)+C_1$，

$$S(x)=\int[-\ln(1-x)+C_1]\mathrm{d}x=(1-x)\ln(1-x)+(C_1+1)x+C_2.$$

由 $S(0)=0,S'(0)=0$ 得$\begin{cases}C_1=0,\\C_2=0,\end{cases}$

故 $S(x)=(1-x)\ln(1-x)+x$；

当 $x=1$ 时，$S(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$，

因此 $S(x)=\begin{cases}(1-x)\ln(1-x)+x, & x\in[-1,1),\\1, & x=1.\end{cases}$

21.【解析】

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 0\\-1 & \lambda-2 & 0\\-1 & -a & \lambda-b\end{vmatrix}=(\lambda-b)[(\lambda-2)^2-1]=(\lambda-b)(\lambda-3)(\lambda-1)=0,$$

解得 A 的特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=3,\lambda_3=b$，由于 A 仅有两个不同的特征值，故 $b=1$ 或 $b=3$.

(1) 若 $b=1$，

当 $\lambda=1$ 时，$E-A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\-1 & -1 & 0\\-1 & -a & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\0 & 1-a & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，

故当且仅当 $a=1$ 时，$r(E-A)=1$，A 可对角化.

由$(E-A)X=0$ 解得对应的两个线性无关的特征向量为 $X_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$X_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$；

当 $\lambda=3$ 时，$3E-A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\-1 & 1 & 0\\-1 & -1 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\0 & -1 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，

由$(3E-A)X=0$ 解得对应的特征向量为 $X_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

令 $P=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}$，则有 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

(2) 若 $b=3$，

当 $\lambda=3$ 时，$3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & -a & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & -1-a & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，

故当且仅当 $a=-1$ 时，$r(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$，$\boldsymbol{A}$ 可对角化.

由 $(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 解得对应的两个线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$；

当 $\lambda=1$ 时，$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，

由 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 解得对应特征向量为 $\boldsymbol{X}_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$，则有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

22.【解析】(1) 当 $x\leqslant 0$ 时，$P\{X\leqslant x\}=0$；

当 $0<x<1$，$P\{X\leqslant x\}=x$；

当 $x\geqslant 1$，$P\{X\leqslant x\}=1$.

故 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) $P\{Z\leqslant z\}=P\left\{\dfrac{Y}{X}\leqslant z\right\}=P\left\{\dfrac{2-X}{X}\leqslant z\right\}=P\left\{X\geqslant\dfrac{2}{z+1}\right\}$.

当 $z<1$，$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=0$；

当 $z\geqslant 1$，$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=\int_{\frac{2}{z+1}}^{1}1\mathrm{d}x=1-\dfrac{2}{z+1}$.

故 Z 的概率密度为

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{2}{(z+1)^2}, & z\geqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(3) $E\left(\dfrac{X}{Y}\right)=E\left(\dfrac{X}{2-X}\right)=\int_0^1\dfrac{x}{2-x}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\dfrac{x}{2-x}\mathrm{d}x=2\ln 2-1$.