2020 年全国硕士研究生招生考试

数　学　(二)

（科目代码：302）

一、选择题：1 ～ 8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

1．当 $x \to 0^+$ 时，下列无穷小量中最高阶的是

A. $\int_0^x (e^{t^2}-1)\,dt$.　　B. $\int_0^x \ln(1+\sqrt{t^3})\,dt$.

C. $\int_0^{\sin x} \sin t^2\,dt$.　　D. $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t}\,dt$.

2．函数 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}$ 的第二类间断点的个数为

A. 1.　　B. 2.　　C. 3.　　D. 4.

3．$\int_0^1 \dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx=$

A. $\dfrac{\pi^2}{4}$.　　B. $\dfrac{\pi^2}{8}$.　　C. $\dfrac{\pi}{4}$.　　D. $\dfrac{\pi}{8}$.

4．已知函数 $f(x)=x^2\ln(1-x)$．当 $n \geqslant 3$ 时，$f^{(n)}(0)=$

A. $-\dfrac{n!}{n-2}$.　　B. $\dfrac{n!}{n-2}$.　　C. $-\dfrac{(n-2)!}{n}$.　　D. $\dfrac{(n-2)!}{n}$.

5．关于函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy, & xy \neq 0 \\ x, & y=0, \\ y, & x=0, \end{cases}$ 给出以下结论：

①$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=1$；②$\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(0,0)}=1$；③$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$；④$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$，

其中正确的个数是

A. 4.　　B. 3.　　C. 2.　　D. 1.

6．设函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上可导，且 $f'(x)>f(x)>0$，则

A. $\dfrac{f(-2)}{f(-1)}>1$.　　B. $\dfrac{f(0)}{f(-1)}>e$.　　C. $\dfrac{f(1)}{f(-1)}<e^2$.　　D. $\dfrac{f(2)}{f(-1)}<e^3$.

7. 设 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 不可逆，a_{12} 的代数余子式 $A_{12}\neq 0$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为

A. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$，其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

B. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$，其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

C. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$，其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

D. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$，其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1 的线性无关的特征向量，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -1 的特征向量，则满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 可为

A. $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3)$.

B. $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3)$.

C. $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$.

D. $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$.

二、填空题：9 ～ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

9. 设 $\begin{cases}x=\sqrt{t^2+1},\\ y=\ln(t+\sqrt{t^2+1}),\end{cases}$ 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}=$ ________.

10. $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^1\sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}x=$ ________.

11. 设 $z=\arctan[xy+\sin(x+y)]$，则 $\mathrm{d}z|_{(0,\pi)}=$ ________.

12. 斜边长为 $2a$ 的等腰直角三角形平板铅直地沉没在水中，且斜边与水面齐平，设重力加速度为 g，水的密度为 ρ，则该平板一侧所受的水压力为 ________.

13. 设 $y=y(x)$ 满足 $y''+2y'+y=0$，且 $y(0)=0,y'(0)=1$，则 $\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x=$ ________.

14. 行列式 $\begin{vmatrix}a&0&-1&1\\0&a&1&-1\\-1&1&a&0\\1&-1&0&a\end{vmatrix}=$ ________.

三、解答题：15 ～ 23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本题满分 10 分）

求曲线 $y=\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}(x>0)$ 的斜渐近线方程.

16.（本题满分 10 分）

已知函数 $f(x)$ 连续且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，$g(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$，求 $g'(x)$，并证明 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

17.（本题满分 10 分）

求函数 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的极值.

18.（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$ 且满足 $2f(x)+x^2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2+2x}{\sqrt{1+x^2}}$. 求 $f(x)$，并求曲线 $y=f(x)$，$y=\dfrac{1}{2}$，$y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 及 y 轴所围图形绕 x 轴旋转所成旋转体的体积.

19.（本题满分 10 分）

设平面区域 D 由直线 $x=1$，$x=2$，$y=x$ 与 x 轴围成，计算 $\iint\limits_D \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

20.（本题满分 11 分）

设函数 $f(x)=\int_1^x e^{t^2}\mathrm{d}t$.

(1) 证明：存在 $\xi\in(1,2)$，使得 $f(\xi)=(2-\xi)e^{\xi^2}$；

(2) 证明：存在 $\eta\in(1,2)$，使得 $f(2)=\ln 2\cdot\eta e^{\eta^2}$.

21.（本题满分 11 分）

设函数 $f(x)$ 可导，且 $f'(x)>0$，曲线 $y=f(x)(x\geqslant 0)$ 经过坐标原点 O，其上任意一点 M 处的切线与 x 轴交于 T，又 MP 垂直 x 轴于点 P. 已知由曲线 $y=f(x)$，直线 MP 以及 x 轴所围图形的面积与 $\triangle MTP$ 的面积之比恒为 3∶2，求满足上述条件的曲线的方程，

22.（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2ax_2x_3+2ax_1x_3$ 经可逆线性变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ 化为二次型 $g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+4y_3^2+2y_1y_2$.

(1) 求 a 的值；

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

23.（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha})$，其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量且不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(1) 证明 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵；

(2) 若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A\alpha}-6\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$，并判断 $\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角矩阵.

2020 年数学(二)答案解析

一、选择题

1.【答案】D

【解析】当 $x \to 0^+$ 时,由等价替换可得

$$\int_0^x (e^{t^2}-1)\mathrm{d}t \sim \int_0^x t^2\mathrm{d}t = \frac{1}{3}x^3,$$

$$\int_0^x \ln(1+\sqrt{t^3})\mathrm{d}t \sim \int_0^x \sqrt{t^3}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}},$$

$$\int_0^{\sin x} \sin t^2\mathrm{d}t \sim \int_0^{\sin x} t^2\mathrm{d}t = \frac{1}{3}(\sin x)^3 \sim \frac{1}{3}x^3,$$

$$\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t}\,\mathrm{d}t \sim \int_0^{1-\cos x} \sqrt{t^3}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{5}(1-\cos x)^{\frac{5}{2}} \sim \frac{\sqrt{2}}{20}x^5,$$

因此最高阶的为$\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t}\,\mathrm{d}t$.

2.【答案】C

【解析】显然 $f(x)$ 在 $x=-1,0,1,2$ 处间断,而

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\cdot x}{x(x-2)} = -\dfrac{e^{-1}}{2}$,因此 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\dfrac{e^{-\frac{1}{2}}}{3(e^{-1}-1)}\lim\limits_{x\to -1^+}\ln|1+x| = -\infty$,因此 $x=-1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\dfrac{\ln 2}{e-1}\lim\limits_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}} = -\infty$,因此 $x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \dfrac{e\ln 3}{e^2-1}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2} = \infty$,因此 $x=2$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

3.【答案】A

【解析】令 $t=\sqrt{x}$,则

原式$=\displaystyle\int_0^1 \frac{\arcsin t}{t\sqrt{1-t^2}}\cdot 2t\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \arcsin t\,\mathrm{d}(\arcsin t) = (\arcsin t)^2\Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{4}$.

4.【答案】A

【解析】$\ln(1-x)$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开式为 $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$,则 $f(x) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+2}}{n}$,

由此可得$\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = -\dfrac{1}{n-2}$,因此 $f^{(n)}(0) = -\dfrac{n!}{n-2}$.

5.【答案】B

【解析】$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1$,因此 ① 正确.

当 $xy\neq 0$ 时,$\dfrac{\partial f}{\partial x}=y,\dfrac{\partial f}{\partial y}=x$;当 $x=0$ 时,$\dfrac{\partial f}{\partial y}=1,\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$;当 $y=0$ 时,$\dfrac{\partial f}{\partial x}=1,\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$,

由此可得,$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 在 $y=0$ 处不连续,则$\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}$ 不存在,因此 ② 不正确.

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}xy=0$,因此 ③ 正确.

$$\lim_{x\to 0}f(x,y)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0}xy=0, & xy\neq 0,\\ \lim\limits_{x\to 0}x=0, & y=0,\\ \lim\limits_{x\to 0}y=y, & x=0,\end{cases}$$ 故$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)=0$,因此 ④ 正确.

6.【答案】B

【解析】令 $g(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$,则由 $f'(x)>f(x)>0$ 可得,$g'(x)=\mathrm{e}^{-x}[f'(x)-f(x)]>0$,

那么 $g(x)$ 在区间$[-2,2]$上单调递增,因此 $g(0)>g(-1)$,即$\dfrac{f(0)}{f(-1)}>\mathrm{e}$.

7.【答案】C

【解析】由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不可逆且 $A_{12}\neq 0$,可得 $r(\boldsymbol{A})=3$ 且 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为方程 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解且 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$,因此 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中只有 3 个向量.

由于 $A_{12}\neq 0$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,因此方程 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4\ (k_1,k_2,k_3\text{ 为任意常数}).$$

8.【答案】D

【解析】由题意可得,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_3$,则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$,

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}(-\boldsymbol{\alpha}_3)=-(-\boldsymbol{\alpha}_3)$,因此可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 可取$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$.

二、填空题

9.【答案】$-\sqrt{2}$

【解析】$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{t},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\Big/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\dfrac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}=-\dfrac{\sqrt{1+t^2}}{t^3}$,

将 $t=1$ 代入,得$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}=-\sqrt{2}$.

10.【答案】$\dfrac{4\sqrt{2}-2}{9}$

【解析】将原积分的积分区域转化为 X 型区域$\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x^2\}$,则

$$原式=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}\sqrt{x^3+1}\,dy=\int_0^1 x^2\sqrt{x^3+1}\,dx=\frac{1}{3}\int_0^1\sqrt{x^3+1}\,d(x^3+1)$$

$$=\frac{2}{9}(x^3+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{4\sqrt{2}-2}{9}.$$

11.【答案】$(\pi-1)dx-dy$

【解析】$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y+\cos(x+y)}{1+[xy+\sin(x+y)]^2}$，将点$(0,\pi)$代入得$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,\pi)}=\pi-1.$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x+\cos(x+y)}{1+[xy+\sin(x+y)]^2}$，将点$(0,\pi)$代入得$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,\pi)}=-1,$

因此，$dz|_{(0,\pi)}=(\pi-1)dx-dy.$

12.【答案】$\frac{1}{3}a^3\rho g$

【解析】以等腰直角三角形斜边的中心为原点建立直角坐标系，x 轴方向向下，则

$$dF=\rho g\cdot x\cdot 2(a-x)dx,$$

两边同时积分得 $F=\int_0^a\rho g\cdot x\cdot 2(a-x)dx=\frac{1}{3}a^3\rho g.$

13.【答案】1

【解析】题中微分方程的特征方程为$\lambda^2+2\lambda+1=0$，解得其特征根为$\lambda_1=\lambda_2=-1$，

因此微分方程的通解为 $y(x)=(C_1+C_2x)e^{-x}$(C_1,C_2 为任意常数)，

由 $y(0)=0,y'(0)=1$，解得 $C_1=0,C_2=1$，则 $y(x)=xe^{-x}$.

从而$\int_0^{+\infty}y(x)dx=\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=1.$

14.【答案】$a^2(a^2-4)$

【解析】
$$\begin{vmatrix}a&0&-1&1\\0&a&1&-1\\-1&1&a&0\\1&-1&0&a\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}1&0&-1&1\\1&a&1&-1\\1&1&a&0\\1&-1&0&a\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}1&0&-1&1\\0&a&2&-2\\0&1&a+1&-1\\0&-1&1&a-1\end{vmatrix}$$

$$=a\begin{vmatrix}a&2&-2\\1&a+1&-1\\-1&1&a-1\end{vmatrix}=a^2(a^2-4).$$

三、解答题

15.【解析】由题意得，

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^x}{(1+x)^x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{1+x}\right)^x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{1+x}\right)^{-(1+x)\cdot\frac{-1}{1+x}x}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{-x}{1+x}}=\frac{1}{e},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(y-\frac{x}{\mathrm{e}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}-\frac{x}{\mathrm{e}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}}\left(\mathrm{e}^{x\ln\frac{x}{1+x}+1}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}}\frac{\frac{1}{x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2\mathrm{e}},$$

故斜渐近线方程为 $y=\frac{x}{\mathrm{e}}+\frac{1}{2\mathrm{e}}$.

16.【解析】由题意可知 $f(0)=0$,且 $f'(0)=1$.

当 $x\neq0$ 时,$g(x)\xlongequal{s=xt}\int_0^x f(s)\mathrm{d}\left(\frac{s}{x}\right)=\frac{\int_0^x f(s)\mathrm{d}s}{x}$;

当 $x=0$ 时,由 $f(0)=0$ 可知 $g(0)=0$.

故当 $x=0$ 时,

$$g'(0)=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(s)\mathrm{d}s}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{1}{2};$$

当 $x\neq0$ 时,

$$g'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(s)\mathrm{d}s}{x^2},$$

故

$$g'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x=0,\\ \frac{xf(x)-\int_0^x f(s)\mathrm{d}s}{x^2}, & x\neq0.\end{cases}$$

又 $\lim\limits_{x\to0}g'(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{xf(x)-\int_0^x f(s)\mathrm{d}s}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}-\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{1}{2}=g'(0)$,

故 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

17.【解析】由 $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-y=0,\\ \frac{\partial f}{\partial y}=24y^2-x=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=0,\\ y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=\frac{1}{6},\\ y=\frac{1}{12},\end{cases}$

且 $A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x$,$B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-1$,$C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=48y$,

在点(0,0)处,$A=0$,$B=-1$,$C=0$,因为 $B^2-AC>0$,故(0,0)不是 $f(x,y)$ 的极值点.

在点 $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)$ 处,$A=1$,$B=-1$,$C=4$,因为 $B^2-AC<0$,$A>0$,故 $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)$ 为 $f(x,y)$ 的极小值点,极小值 $f\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)=-\frac{1}{216}$.

因此函数 $f(x,y)$ 的极小值为 $-\frac{1}{216}$.

18.【解析】由题中所给方程可得 $2f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^2}f(x)=\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{\frac{1}{x}+2}{\sqrt{x^2+1}}$,

上式两边同乘 x^2,得

$$f(x)+2x^2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x+2x^2}{\sqrt{x^2+1}},$$

联立该方程与原方程,解得 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$,则 $x=\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$,故

$$V=2\pi\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y\xlongequal{y=\sin t}2\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin^2t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{6}.$$

19.【解析】令 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$,则将平面区域 D 转化为极坐标系下的区域 D_0,那么

$$D_0=\left\{(x,y)\middle|0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4},\frac{1}{\cos\theta}\leqslant r\leqslant\frac{2}{\cos\theta}\right\},$$

令 $I=\iint\limits_D\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,则

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta}}r\cdot\frac{r}{r\cos\theta}\mathrm{d}r=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^3\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\,\mathrm{d}\theta,$$

而 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec\theta\,\mathrm{d}(\tan\theta)=\sec\theta\tan\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec\theta\tan^2\theta\,\mathrm{d}\theta$

$$=\sqrt{2}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2\theta-1)\sec\theta\,\mathrm{d}\theta=\sqrt{2}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec\theta\,\mathrm{d}\theta-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\sqrt{2}+\ln(\sec\theta+\tan\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\,\mathrm{d}\theta,$$

因此 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)}{2}$,所以 $I=\frac{3}{4}\left[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)\right]$.

20.【证明】(1) 令 $F(x)=(x-2)f(x)$,由于 $F(1)=0,F(2)=0$,

故由罗尔定理,存在 $\xi\in(1,2)$,使得 $F'(\xi)=0$.

又由于 $F'(x)=f(x)+(x-2)f'(x)$,故有 $f(\xi)=(2-\xi)f'(\xi)=(2-\xi)e^{\xi^2}$.

(2) 令 $g(x)=\ln x$,由柯西中值定理知,存在 $\eta\in(1,2)$,

$$\frac{f(2)}{\ln 2}=\frac{f(2)-f(1)}{\ln 2-\ln 1}=\frac{f'(\eta)}{\frac{1}{\eta}}=\eta e^{\eta^2},$$

故 $f(2)=\eta e^{\eta^2}\ln 2$.

21.【解析】不妨设曲线上任意一点 $M(x_0,f(x_0))$，

则切线 MT 方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$，

设 T 点的坐标为 $(x_T,0)$，则有

$$0-f(x_0)=f'(x_0)(x_T-x_0)$$

$$\Rightarrow |x_T-x_0|=\left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right|=\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}(f(x_0)>0,f'(x_0)>0),$$

则 $$S_{\triangle MTP}=\frac{1}{2}|x_T-x_0||f(x_0)|=\frac{f^2(x_0)}{2f'(x_0)},S_{OMP}=\int_0^{x_0}f(x)\mathrm{d}x,$$

从而 $\frac{3}{2}=\frac{\int_0^{x_0}f(x)\mathrm{d}x}{\frac{f^2(x_0)}{2f'(x_0)}}$，得 $\int_0^{x_0}f(x)\mathrm{d}x=\frac{3f^2(x_0)}{4f'(x_0)}$，

求导得 $f(x_0)=\frac{6f(x_0)f'(x_0)\cdot 4f'(x_0)-3f^2(x_0)\cdot 4f''(x_0)}{16[f'(x_0)]^2}$，

整理得 $2[f'(x_0)]^2-3f(x_0)f''(x_0)=0$.

记 $y=f(x_0)$，即有 $2(y')^2-3yy''=0$，令 $y'=p,y''=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，则有 $2p^2-3yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=0$，

即 $\frac{\mathrm{d}p}{2p}=\frac{\mathrm{d}y}{3y}$，

整理得 $p=C_1y^{\frac{2}{3}}$，即 $y'=C_1y^{\frac{2}{3}}$，

解得 $3y^{\frac{1}{3}}=C_1x+C_2$，又 $f(0)=0$，所以 $C_2=0$. 易知曲线方程为 $y=Cx^3(C>0)$.

22.【解析】(1) 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&a\\a&1&a\\a&a&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$，

则 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{APY}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BY}$.

由于 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同，故 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=2$，

从而 $|\boldsymbol{A}|=0$，即 $1+2a^3-3a^2=(2a+1)(a-1)^2=0$.

解得 $a=1$ 或 $-\frac{1}{2}$.

当 $a=1$ 时，$r(\boldsymbol{A})=1\neq r(\boldsymbol{B})$，故舍去，即 $a=-\frac{1}{2}$.

(2) 由(1) 知 $a=-\frac{1}{2}$，此时，

$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_2x_3-x_1x_3=\left(x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\right)^2+\frac{3}{4}(x_2-x_3)^2$，

令$\begin{cases} z_1 = x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3, \\ z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_3, \\ z_3 = x_3, \end{cases}$ 则 $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{X}$，其中 $\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

故 $f(x_1, x_2, x_3) = z_1^2 + z_2^2$.

$g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2 + 2y_1y_2 = (y_1 + y_2)^2 + 4y_3^2$，

令$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_2, \\ z_2 = 2y_3, \\ z_3 = y_2, \end{cases}$ 则 $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{Y}$，其中 $\boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，故 $g(x_1, x_2, x_3) = z_1^2 + z_2^2$.

f 经可逆变换 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}$ 化为 g，则有 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$，

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & \frac{4}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

23.(1)【证明】反证法：若 $\boldsymbol{P}$ 不为可逆矩阵，则 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A\alpha}$ 线性相关，即存在 λ，使得 $\boldsymbol{A\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}$，这与 $\boldsymbol{\alpha}$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量矛盾，故假设不成立，$\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵.

(2)【解析】$\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A\alpha}) = (\boldsymbol{A\alpha}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}) = (\boldsymbol{A\alpha}, 6\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{A\alpha}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A\alpha})\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$，

故 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$，故 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$.

由 $|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} \lambda & -6 \\ -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 1) - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0$，

则 $\boldsymbol{B}$ 的特征值 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$.

由于 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，故 $\boldsymbol{B}$ 必有两个线性无关的特征向量，因此 $\boldsymbol{B}$ 相似于对角矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$，

从而 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.