2020年全国硕士研究生招生考试

数 学 （三）

（科目代码:303）

一、选择题:1～8小题,每小题4分,共32分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

1. 设$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-a}{x-a}=b$,则$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin f(x)-\sin a}{x-a}=$

A. $b\sin a$.　　B. $b\cos a$.　　C. $b\sin f(a)$.　　D. $b\cos f(a)$.

2. 函数$f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}$的第二类间断点的个数为

A. 1.　　B. 2.　　C. 3.　　D. 4.

3. 设奇函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上具有连续导数,则

A. $\int_0^x[\cos f(t)+f'(t)]dt$是奇函数.　　B. $\int_0^x[\cos f(t)+f'(t)]dt$是偶函数.

C. $\int_0^x[\cos f'(t)+f(t)]dt$是奇函数.　　D. $\int_0^x[\cos f'(t)+f(t)]dt$是偶函数.

4. 设幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-2)^n$的收敛区间为$(-2,6)$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x+1)^{2n}$的收敛区间为

A. $(-2,6)$.　　B. $(-3,1)$.　　C. $(-5,3)$.　　D. $(-17,15)$.

5. 设4阶矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$不可逆,a_{12}的代数余子式$A_{12}\neq 0$,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$为矩阵$\boldsymbol{A}$的列向量组,$\boldsymbol{A}^*$为$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵,则方程组$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的通解为

A. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$,其中$k_1,k_2,k_3$为任意常数.

B. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$,其中$k_1,k_2,k_3$为任意常数.

C. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$,其中$k_1,k_2,k_3$为任意常数.

D. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$,其中$k_1,k_2,k_3$为任意常数.

6. 设$\boldsymbol{A}$为3阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$为矩阵$\boldsymbol{A}$的属于特征值1的线性无关的特征向量,$\boldsymbol{\alpha}_3$为$\boldsymbol{A}$的属于特征值$-1$的特征向量,则满足$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$的可逆矩阵$\boldsymbol{P}$可为

A. $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3)$.　　B. $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3)$.

C. $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$.　　D. $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$.

7. 设 A,B,C 为三个随机事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=0$，

$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{12}$，则 A,B,C 中恰有一个事件发生的概率为

A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{5}{12}$.

8. 设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布 $N\left(0,0;1,4;-\frac{1}{2}\right)$，则下列随机变量中服从标准正态分布且与 X 独立的是

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}(X+Y)$. B. $\frac{\sqrt{5}}{5}(X-Y)$. C. $\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)$. D. $\frac{\sqrt{3}}{3}(X-Y)$.

二、填空题：9 ～ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

9. 设 $z=\arctan[xy+\sin(x+y)]$，则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,\pi)}=$________.

10. 曲线 $x+y+\mathrm{e}^{2xy}=0$ 在点 $(0,-1)$ 处的切线方程为________.

11. 设某厂家生产某产品的产量为 Q，成本 $C(Q)=100+13Q$，该产品的单价为 p，需求量 $Q(p)=\frac{800}{p+3}-2$，则该厂家获得最大利润时的产量为________.

12. 设平面区域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{x}{2}\leqslant y\leqslant\frac{1}{1+x^2},0\leqslant x\leqslant 1\right\}$，则 D 绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积为________.

13. 行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix}=$________.

14. 设随机变量 X 的概率分布 $P\{X=k\}=\frac{1}{2^k}$，$k=1,2,3,\cdots$，Y 表示 X 被 3 除的余数，则 $E(Y)=$________.

三、解答题：15 ～ 23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本题满分 10 分）

已知 a,b 为常数，若 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\mathrm{e}$ 与 $\frac{b}{n^a}$ 在 $n\to\infty$ 时是等价无穷小量，求 a,b.

16.（本题满分 10 分）

求函数 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的极值.

17.（本题满分 10 分）

设函数 $y=f(x)$ 满足 $y''+2y'+5y=0$，且 $f(0)=1, f'(0)=-1$.

(1) 求 $f(x)$ 的表达式；

(2) 设 $a_n=\int_{n\pi}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

18.（本题满分 10 分）

已知 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1, y\geqslant 0\}$，连续函数 $f(x,y)$ 满足 $f(x,y)=y\sqrt{1-x^2}+x\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，求 $\iint\limits_D xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

19.（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上具有连续导数，$f(0)=f(2)=0$，$M=\max\limits_{x\in[0,2]}\{|f(x)|\}$. 证明：

(1) 存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $|f'(\xi)|\geqslant M$；

(2) 若对任意的 $x\in(0,2)$，$|f'(x)|\leqslant M$，则 $M=0$.

20.（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2)=x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2$ 经正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ 化为二次型 $g(y_1,y_2)=ay_1^2+4y_1y_2+by_2^2$，其中 $a\geqslant b$.

(1) 求 a,b 的值；

(2) 求正交矩阵 Q.

21.（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha})$，其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量且不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(1) 证明 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵；

(2) 若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A\alpha}-6\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$，并判断 $\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角矩阵.

22.（本题满分 11 分）

设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y)\mid 0<y<\sqrt{1-x^2}\}$ 上服从均匀分布，令

$$Z_1=\begin{cases}1, & X-Y>0,\\ 0, & X-Y\leqslant 0,\end{cases}\quad Z_2=\begin{cases}1, & X+Y>0,\\ 0, & X+Y\leqslant 0.\end{cases}$$

(1) 求二维随机变量 (Z_1,Z_2) 的概率分布；

(2) 求 Z_1 与 Z_2 的相关系数.

23.（本题满分 11 分）

设某种元件的使用寿命 T 的分布函数为

$$F(t)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t\geqslant 0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中 θ,m 为参数且大于零.

(1) 求概率 $P\{T>t\}$ 与 $P\{T>s+t\mid T>s\}$，其中 $s>0,t>0$；

(2) 任取 n 个这种元件做寿命试验，测得它们的寿命分别为 $t_1,t_2,\cdots,t_n$. 若 m 已知，求 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$.

2020 年数学(三)答案解析

一、选择题

1.【答案】B

【解析】$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-a}{x-a}$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=a$，且由导数的定义可得 $f'(a)=b$，

因此，$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin f(x)-\sin a}{x-a}=[\sin f(x)]'\Big|_{x=a}=f'(a)\cos f(a)=b\cos a$.

2.【答案】C

【解析】显然 $f(x)$ 在 $x=-1,0,1,2$ 处间断，而

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\cdot x}{x(x-2)}=-\dfrac{e^{-1}}{2}$，因此 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

$\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=-\dfrac{e^{-\frac{1}{2}}}{3(e^{-1}-1)}\lim\limits_{x\to -1^+}\ln(1+x)=-\infty$，因此 $x=-1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=-\dfrac{\ln 2}{e-1}\lim\limits_{x\to 1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=-\infty$，因此 $x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\dfrac{e\ln 3}{e^2-1}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}=\infty$，因此 $x=2$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

3.【答案】A

【解析】$f(x)$ 为奇函数，则 $f'(x)$ 为偶函数.

令 $g(x)=\int_0^x[\cos f(t)+f'(t)]dt$，则 $g'(x)=\cos f(x)+f'(x)$，

那么 $g'(-x)=\cos f(-x)+f'(-x)=\cos f(x)+f'(x)=g'(x)$，

从而 $g'(x)$ 为偶函数，因此 $g(x)$ 为奇函数.

4.【答案】B

【解析】由题意可知，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-2)^n$ 的收敛半径为 4，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x+1)^n$ 的收敛半径为 4，

从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x+1)^{2n}$ 的收敛半径为 2，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x+1)^{2n}$ 的收敛区间为 $(-3,1)$.

5.【答案】C

【解析】由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不可逆且 $A_{12}\neq 0$，可得 $r(\boldsymbol{A})=3$ 且 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为方程 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解且 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$，因此 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中只有 3 个向量.

由于 $A_{12}\neq 0$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，因此方程 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4\ (k_1,k_2,k_3\text{ 为任意常数}).$$

6.【答案】D

【解析】由题意可得，$A\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，$A\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2$，$A\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_3$，则 $A(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$A\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2$，$A(-\boldsymbol{\alpha}_3)=-(-\boldsymbol{\alpha}_3)$，因此可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 可取 $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$.

7.【答案】D

【解析】A,B,C 恰有一个事件发生的概率 $p=P(\overline{A}\,\overline{B}C)+P(\overline{A}B\overline{C})+P(A\overline{B}\,\overline{C})$.

$$P(\overline{A}\,\overline{B}C)=P(C)-P(C(A+B))=P(C)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)=\frac{1}{4}-\frac{1}{12}-\frac{1}{12}=\frac{1}{12},$$

$$P(\overline{A}B\overline{C})=P(B)-P(B(A+C))=P(B)-P(AB)-P(BC)+P(ABC)=\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{1}{6},$$

$$P(A\overline{B}\,\overline{C})=P(A)-P(A(B+C))=P(A)-P(AB)-P(AC)+P(ABC)=\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{1}{6},$$

因此 $p=P(\overline{A}\,\overline{B}C)+P(\overline{A}B\overline{C})+P(A\overline{B}\,\overline{C})=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$.

8.【答案】C

【解析】由题意可得，随机变量 $X+Y\sim N(0,3)$，$X-Y\sim N(0,7)$，则

$$\frac{\sqrt{5}}{5}(X+Y)\sim N\left(0,\frac{3}{5}\right),\frac{\sqrt{5}}{5}(X-Y)\sim N\left(0,\frac{7}{5}\right),$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)\sim N(0,1),\frac{\sqrt{3}}{3}(X-Y)\sim N\left(0,\frac{7}{3}\right).$$

二、填空题

9.【答案】$(\pi-1)\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$

【解析】$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y+\cos(x+y)}{1+[xy+\sin(x+y)]^2}$，将点 $(0,\pi)$ 代入得 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,\pi)}=\pi-1$，

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x+\cos(x+y)}{1+[xy+\sin(x+y)]^2}$，将点 $(0,\pi)$ 代入得 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,\pi)}=-1$，

因此，$\mathrm{d}z|_{(0,\pi)}=(\pi-1)\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$.

10.【答案】$y=x-1$

【解析】方程 $x+y+e^{2xy}=0$ 两边同时对 x 求导，得 $1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left(2y+2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)e^{2xy}=0$，

将 $(0,-1)$ 代入得 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(0,-1)}=1$，因此曲线在点 $(0,-1)$ 处的切线方程为 $y=x-1$.

11.【答案】8

【解析】由 $Q(p)=\frac{800}{p+3}-2$ 可得 $p=\frac{800}{Q+2}-3$，则总收益函数为 $R(Q)=pQ=\frac{800Q}{Q+2}-3Q$，

从而利润 $L(Q)=R(Q)-C(Q)=\frac{800Q}{Q+2}-3Q-100-13Q=\frac{800Q}{Q+2}-16Q-100$，

经计算 $L'(Q)=\frac{1600}{(Q+2)^2}-16$，

令 $L'(Q)=0$,解得 $Q=8$,且当 $Q>8$ 时,$L'(Q)<0$,当 $Q<8$ 时,$L'(Q)>0$.
因此 $L(Q)$ 在 $Q=8$ 时取得最大值,即当产量为 8 时,利润最大.

12.【答案】$\pi\left(\ln 2-\frac{1}{3}\right)$

【解析】旋转体的体积 V 可分为两个部分:$y=\frac{x}{2}$ 绕 y 轴旋转所成的旋转体体积 V_1 及 $y=\frac{1}{1+x^2}$ 绕 y 轴旋转所成的旋转体体积 V_2,则

$$V=V_1+V_2=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}x^2\mathrm{d}y+\pi\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2\mathrm{d}y=4\pi\int_0^{\frac{1}{2}}y^2\mathrm{d}y+\pi\int_{\frac{1}{2}}^1\left(\frac{1}{y}-1\right)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\pi}{6}+\pi\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)=\pi\left(\ln 2-\frac{1}{3}\right).$$

13.【答案】$a^2(a^2-4)$

【解析】$$\begin{vmatrix}a&0&-1&1\\0&a&1&-1\\-1&1&a&0\\1&-1&0&a\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}1&0&-1&1\\1&a&1&-1\\1&1&a&0\\1&-1&0&a\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}1&0&-1&1\\0&a&2&-2\\0&1&a+1&-1\\0&-1&1&a-1\end{vmatrix}$$

$$=a\begin{vmatrix}a&2&-2\\1&a+1&-1\\-1&1&a-1\end{vmatrix}=a^2(a^2-4).$$

14.【答案】$\frac{8}{7}$

【解析】由题意可得,Y 的分布律为

$$P\{Y=0\}=P\{X=3k\}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{3k}}=\frac{\frac{1}{2^3}}{1-\frac{1}{2^3}}=\frac{1}{7},$$

$$P\{Y=1\}=P\{X=3k+1\}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{3k+1}}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2^3}}=\frac{4}{7},$$

$$P\{Y=2\}=P\{X=3k+2\}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{3k+2}}=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2^3}}=\frac{2}{7},$$

因此 $E(Y)=\frac{4}{7}+2\times\frac{2}{7}=\frac{8}{7}$.

三、解答题

15.【解析】由题知

$$1=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\mathrm{e}}{\frac{b}{n^a}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-\mathrm{e}}{\frac{b}{n^a}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{n\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]}-\mathrm{e}}{\frac{b}{n^a}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{1-\frac{1}{2n}}-\mathrm{e}}{\frac{b}{n^a}}=\frac{\mathrm{e}}{b}\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2n}}-1}{\frac{1}{n^a}}=\frac{\mathrm{e}}{b}\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{2n}}{\frac{1}{n^a}},$$

可得 $a=1,b=-\frac{\mathrm{e}}{2}$.

16.【解析】由 $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-y=0,\\ \frac{\partial f}{\partial y}=24y^2-x=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=0,\\ y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=\frac{1}{6},\\ y=\frac{1}{12}.\end{cases}$

且
$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x,B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-1,C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=48y,$$

在点 $(0,0)$ 处，$A=0,B=-1,C=0$，因为 $B^2-AC>0$，故 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

在点 $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)$ 处，$A=1,B=-1,C=4$，因为 $B^2-AC<0,A>0$，故 $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)$ 为 $f(x,y)$ 的极小值点，极小值 $f\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)=-\frac{1}{216}$.

因此函数 $f(x,y)$ 的极小值为 $-\frac{1}{216}$.

17.【解析】(1) 原齐次线性微分方程的特征方程为 $\lambda^2+2\lambda+5=0$，

解得 $\lambda=-1\pm 2\mathrm{i}$.

因此方程的通解为 $y=\mathrm{e}^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$.

则 $y'=-\mathrm{e}^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+\mathrm{e}^{-x}(-2C_1\sin 2x+2C_2\cos 2x)$，

由题意可知

$$f(0)=C_1=1,f'(0)=-C_1+2C_2=-1,$$

解得 $C_1=1,C_2=0$.

因此 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}\cos 2x$.

(2) $a_n=\int_{n\pi}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\cos 2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{n\pi}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}(\sin 2x)$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\sin 2x\Big|_{n\pi}^{+\infty}-\frac{1}{2}\int_{n\pi}^{+\infty}\sin 2x\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})=\frac{1}{2}\int_{n\pi}^{+\infty}\sin 2x\cdot\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{4}\int_{n\pi}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}(\cos 2x)=-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x}\cos 2x\Big|_{n\pi}^{+\infty}-\frac{1}{4}\int_{n\pi}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\cos 2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-n\pi}-\frac{1}{4}a_n.$$

可得 $a_n=\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-n\pi}$，

故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\pi} = \frac{1}{5}\frac{e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}} = \frac{1}{5(e^{\pi}-1)}$.

18.【解析】令 $I=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，由题意可知

$$I=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D y\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+I\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由对称性可知，$I\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，故

$$I=\iint\limits_D y\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x \xlongequal{x=\cos t} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^3 t\,\mathrm{d}(\cos t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\,\mathrm{d}t=\frac{3\pi}{16},$$

故 $f(x,y)=y\sqrt{1-x^2}+\frac{3\pi}{16}x$.

则 $\iint\limits_D xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\left(xy\sqrt{1-x^2}+\frac{3\pi}{16}x^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3\pi}{16}\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\frac{3\pi}{16}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\cos^2\theta\,\mathrm{d}r=\frac{3\pi^2}{128}.$$

19.【证明】(1) 不妨设 $|f(c)|=M$，f 在$[0,2]$上连续可导，

故由拉格朗日中值定理知，存在 $\xi_1\in(0,c)$，$\xi_2\in(c,2)$，

使得
$$\begin{cases}M=|f(c)-f(0)|=|f'(\xi_1)|c,\\ M=|f(2)-f(c)|=|f'(\xi_2)|(2-c)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|f'(\xi_1)|=\dfrac{M}{c},\\ |f'(\xi_2)|=\dfrac{M}{2-c},\end{cases}$$

故取 $\xi=\begin{cases}\xi_1, & 0<c\leqslant 1,\\ \xi_2, & 1<c<2,\end{cases}$ 显然有 $|f'(\xi)|\geqslant M$.

(2) 由(1)知，存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $|f'(\xi)|\geqslant M$，当且仅当 $c=1$ 时取等号.

若 $f(1)=M$，令 $F(x)=f(x)-Mx$，则 $F'(x)=f'(x)-M\leqslant 0$，

又 $F(0)=F(1)=0$，故 $F(x)\equiv 0$，$x\in[0,1]$，即

$$f(x)\equiv Mx,x\in[0,1],$$

故 $f'(x)\equiv M$，$x\in[0,1]$，由于 $f'(1)=0$，故 $M\equiv 0$，

同理若 $f(1)=-M$，也知 $M=0$.

20.【解析】(1) 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a&2\\2&b\end{pmatrix}$，由题意可得，

$$f(x_1,x_2)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y},$$

$$g(y_1,y_2)=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y},$$

因为 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值. 由

$$0=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2\\2&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-4)-4=\lambda^2-5\lambda,$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=5$.

由
$$0=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda-a & -2\\ -2 & \lambda-b\end{vmatrix}=(\lambda-a)(\lambda-b)-4,$$

得 $\begin{cases}(0-a)(0-b)-4=0,\\ (5-a)(5-b)-4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=4,\\ b=1.\end{cases}$

(2) 由题意可得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$，即 $\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}$.

对于矩阵 $\boldsymbol{A}$：

特征值 $\lambda=0$ 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$，单位化得 $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$，

特征值 $\lambda=5$ 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$，单位化得 $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$，则令

$$\boldsymbol{Q}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix},$$

从而 $\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$.

对于矩阵 $\boldsymbol{B}$：

特征值 $\lambda=0$ 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$，单位化得 $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$，

特征值 $\lambda=5$ 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$，单位化得 $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$，则令

$$\boldsymbol{Q}_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix},$$

从而 $\boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$. 因此

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}_2\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{T}},$$

令 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{T}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$，即为所求正交矩阵.

21. (1)【证明】反证法：若 $\boldsymbol{P}$ 不为可逆矩阵，则 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha}$ 线性相关，即存在 λ，使得 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，这与 $\boldsymbol{\alpha}$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量矛盾，故假设不成立，$\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵.

(2)【解析】

$$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha})=(\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{A\alpha},6\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{A\alpha})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha})\begin{pmatrix}0 & 6\\ 1 & -1\end{pmatrix},$$

故 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}0 & 6\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 6\\ 1 & -1\end{pmatrix}$，故 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda & -6\\ -1 & \lambda+1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)-6=(\lambda-2)(\lambda+3)=0$，

得 $\boldsymbol{B}$ 的特征值 $\lambda_1=2,\lambda_2=-3$.

由于 $\lambda_1\neq\lambda_2$，故 $\boldsymbol{B}$ 必有两个线性无关的特征向量，因此 $\boldsymbol{B}$ 相似于对角矩阵 $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}$，

从而 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵 $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}$.

22.【解析】(1) 由几何概型理论知：

$$P\{Z_1=1,Z_2=1\}=\frac{1}{4},P\{Z_1=1,Z_2=0\}=0,$$

$$P\{Z_1=0,Z_2=0\}=\frac{1}{4},P\{Z_1=0,Z_2=1\}=\frac{1}{2}.$$

故 (Z_1,Z_2) 的概率分布为

Z_1	Z_2	
	0	1
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{4}$

(2) 由 (1) 知，$P\{Z_1=1\}=\frac{1}{4},P\{Z_2=1\}=\frac{3}{4}$，则

$$E(Z_1)=1\times P\{Z_1=1\}+0\times P\{Z_1=0\}=\frac{1}{4},$$

$$E(Z_2)=1\times P\{Z_2=1\}+0\times P\{Z_2=0\}=\frac{3}{4},$$

故 $D(Z_1)=E\{[Z_1-E(Z_1)]^2\}=\left(1-\frac{1}{4}\right)^2P(Z_1=1)+\left(0-\frac{1}{4}\right)^2P(Z_1=0)=\frac{3}{16}$，

$D(Z_2)=E\{[Z_2-E(Z_2)]^2\}=\left(1-\frac{3}{4}\right)^2P(Z_2=1)+\left(0-\frac{3}{4}\right)^2P(Z_2=0)=\frac{3}{16}$，

由 (1) 可得，$\mathrm{Cov}(Z_1,Z_2)=E(Z_1Z_2)-E(Z_1)\cdot E(Z_2)=\left(\frac{1}{4}\times1+\frac{3}{4}\times0\right)-\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{16}$，

因此

$$\rho_{Z_1Z_2}=\frac{\frac{1}{16}}{\sqrt{\frac{3}{16}}\cdot\sqrt{\frac{3}{16}}}=\frac{1}{16}\times\frac{16}{3}=\frac{1}{3}.$$

23.【解析】(1) $P\{T>t\}=1-F(t)=e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}$，则

$$P\{T>s+t \mid T>s\}=\frac{P\{T>t+s, T>s\}}{P\{T>s\}}=\frac{e^{-\left(\frac{t+s}{\theta}\right)^m}}{e^{-\left(\frac{s}{\theta}\right)^m}}=e^{\left(\frac{s}{\theta}\right)^m-\left(\frac{t+s}{\theta}\right)^m}.$$

(2) T 的概率密度函数 $f(t)=\begin{cases} e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}\dfrac{mt^{m-1}}{\theta^m}, & t>0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$

则似然函数为

$$L(\theta)=\frac{m^n}{\theta^{mn}}(t_1\cdots t_n)^{m-1}e^{-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}t_i^m}{\theta^m}},$$

取对数 $\ln L(\theta)=n\ln m-mn\ln\theta+(m-1)\sum\limits_{i=1}^{n}\ln t_i-\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}t_i^m}{\theta^m}$，

由 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\dfrac{-mn}{\theta}+\left(\sum\limits_{i=1}^{n}t_i^m\right)m\theta^{-m-1}=0$，解得 $\theta=\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}t_i^m}{n}\right)^{\frac{1}{m}}$，

故 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}T_i^m}{n}\right)^{\frac{1}{m}}$.