2020 年全国硕士研究生招生考试

数 学 (一)

(科目代码:301)

一、选择题:1 ～ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一个选项是最符合题目要求的.

1. 当 $x \to 0^+$ 时,下列无穷小量中最高阶的是

A. $\int_0^x (e^{t^2}-1)dt$.　B. $\int_0^x \ln(1+\sqrt{t^3})dt$.　C. $\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt$.　D. $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t}\, dt$.

2. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内有定义,且 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$,则

A. 当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$ 时,$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

B. 当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$ 时,$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

C. 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$.

D. 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$.

3. 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微,$f(0,0)=0$,$\boldsymbol{n}=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},-1\right)\Bigg|_{(0,0)}$,非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 垂直,则

A. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在.　B. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\boldsymbol{n}\times(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在.

C. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\boldsymbol{\alpha}\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在.　D. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\boldsymbol{\alpha}\times(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在.

4. 设 R 为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径,r 是实数,则

A. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 发散时,$|r|\geqslant R$.　B. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 收敛时,$|r|\leqslant R$.

C. 当 $|r|\geqslant R$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 发散.　D. 当 $|r|\leqslant R$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 收敛.

5. 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经初等列变换化成 $\boldsymbol{B}$，则

A. 存在矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$.　　B. 存在矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{BP}=\boldsymbol{A}$.

C. 存在矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{PB}=\boldsymbol{A}$.　　D. 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解.

6. 已知直线 $l_1:\dfrac{x-a_2}{a_1}=\dfrac{y-b_2}{b_1}=\dfrac{z-c_2}{c_1}$ 与直线 $l_2:\dfrac{x-a_3}{a_2}=\dfrac{y-b_3}{b_2}=\dfrac{z-c_3}{c_2}$ 相交于一点.记

向量 $\boldsymbol{\alpha}_i=\begin{pmatrix}a_i\\b_i\\c_i\end{pmatrix}$，$i=1,2,3$，则

A. $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.　　B. $\boldsymbol{\alpha}_2$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

C. $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示.　　D. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

7. 设 A,B,C 为三个随机事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{12}$，则 A,B,C 中恰有一个事件发生的概率为

A. $\dfrac{3}{4}$.　　B. $\dfrac{2}{3}$.　　C. $\dfrac{1}{2}$.　　D. $\dfrac{5}{12}$.

8. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{100}$ 为来自总体 X 的简单随机样本，其中 $P\{X=0\}=P\{X=1\}=\dfrac{1}{2}$.

$\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数，则利用中心极限定理可得 $P\left\{\sum\limits_{i=1}^{100}X_i\leqslant 55\right\}$ 的近似值为

A. $1-\Phi(1)$.　　B. $\Phi(1)$.

C. $1-\Phi(0.2)$.　　D. $\Phi(0.2)$.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]=$________.

10. 设 $\begin{cases}x=\sqrt{t^2+1},\\y=\ln(t+\sqrt{t^2+1}),\end{cases}$ 则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=$________.

11. 若函数 $f(x)$ 满足 $f''(x)+af'(x)+f(x)=0(a>0)$，且 $f(0)=m$，$f'(0)=n$，则 $\int_0^{+\infty}f(x)dx=$________.

12. 设函数 $f(x,y)=\int_0^{xy}e^{xt^2}dt$，则 $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=$________.

13. 行列式 $\begin{vmatrix}a&0&-1&1\\0&a&1&-1\\-1&1&a&0\\1&-1&0&a\end{vmatrix}=$________.

14. 设 X 服从区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上的均匀分布，$Y=\sin X$，则 $\mathrm{Cov}(X,Y)=$________.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本题满分 10 分）

求函数 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的极值.

16.（本题满分 10 分）

计算曲线积分 $I=\int_L \frac{4x-y}{4x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{4x^2+y^2}dy$，其中 L 为 $x^2+y^2=2$，方向为逆时针方向.

17.（本题满分 10 分）

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$(n+1)a_{n+1}=\left(n+\frac{1}{2}\right)a_n$. 证明：当 $|x|<1$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 收敛，并求其和函数.

18.（本题满分 10 分）

设 Σ 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$（$1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$）的下侧，$f(x)$ 是连续函数. 计算

$I=\iint\limits_{\Sigma}[xf(xy)+2x-y]dydz+[yf(xy)+2y+x]dzdx+[zf(xy)+z]dxdy$.

19.（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上具有连续导数，$f(0)=f(2)=0$，$M=\max\limits_{x\in[0,2]}\{|f(x)|\}$. 证明：

（1）存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $|f'(\xi)|\geqslant M$；

（2）若对任意的 $x\in(0,2)$，$|f'(x)|\leqslant M$，则 $M=0$.

20.（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2)=x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2$ 经过正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ 化为二次型

$g(y_1,y_2)=ay_1^2+4y_1y_2+by_2^2$，其中 $a\geqslant b$.

(1) 求 a,b 的值；

(2) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

21.（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha})$，其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量且不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(1) 证明：$\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵；

(2) 若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A\alpha}-6\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$，并判断 $\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角矩阵.

22.（本题满分 11 分）

设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立，其中 X_1 与 X_2 均服从标准正态分布，X_3 的概率分布为

$$P\{X_3=0\}=P\{X_3=1\}=\frac{1}{2}.\ Y=X_3X_1+(1-X_3)X_2.$$

(1) 求二维随机变量 (X_1,Y) 的分布函数，结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示；

(2) 证明：随机变量 Y 服从标准正态分布.

23.（本题满分 11 分）

设某种元件的使用寿命 T 的分布函数为

$$F(t)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t\geqslant 0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 θ,m 为参数且大于零.

(1) 求概率 $P\{T>t\}$ 与 $P\{T>s+t\mid T>s\}$，其中 $s>0,t>0$；

(2) 任取 n 个这种元件做寿命试验，测得它们的寿命分别为 $t_1,t_2,\cdots,t_n$，若 m 已知，求 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$.

2020 年数学(一)答案解析

一、选择题

1.【答案】D

【解析】当 $x\to 0^+$ 时，由等价替换可得

$\int_0^x (e^{t^2}-1)dt \sim \int_0^x t^2 dt=\frac{1}{3}x^3$，

$\int_0^x \ln(1+\sqrt{t^3})dt \sim \int_0^x \sqrt{t^3}dt=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$，

$\int_0^{\sin x}\sin t^2 dt \sim \int_0^{\sin x} t^2 dt=\frac{1}{3}(\sin x)^3 \sim \frac{1}{3}x^3$，

$\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\sin^3 t}\,dt \sim \int_0^{1-\cos x}\sqrt{t^3}\,dt=\frac{2}{5}(1-\cos x)^{\frac{5}{2}} \sim \frac{\sqrt{2}}{20}x^5$，

因此最高阶的为$\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\sin^3 t}\,dt$.

2.【答案】C

【解析】$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，故有$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$，

而$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\cdot\frac{f(x)}{x}=0$，同理可得 $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$，

因此$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$.

3.【答案】A

【解析】令 $z=f(x,y)$，则由 $f(x,y)$ 在$(0,0)$ 处可微得

$$\Delta z=f(x,y)-f(0,0)=f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(0,0)}x+\frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{(0,0)}y+o(\sqrt{x^2+y^2})，$$

从而有

$$|\boldsymbol{n}\cdot(x,y,f(x,y))|=o(\sqrt{x^2+y^2})，$$

因此 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|\boldsymbol{n}\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

4.【答案】A

【解析】由题意可知，幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛区间为$(-R,R)$，但是当 $x=\pm R$ 时级数的敛散性并不确定，因此，当$|r|<R$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n r^n$ 收敛，由于数列$\{a_{2n}r^{2n}\}$ 为数列$\{a_n r^n\}$ 的子列，因此$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 也收敛；反之，若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n r^n$ 也发散，从而$|r|\geqslant R$.

5.【答案】B

【解析】由题意可得，存在初等矩阵 Q 使得 $\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{B}$，从而 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BQ}^{-1}$，令 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{Q}^{-1}$ 即有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BP}$.

6.【答案】C

【解析】直线 l_1 的方向向量为 (a_1,b_1,c_1)，直线 l_2 的方向向量为 (a_2,b_2,c_2)，因此由题意可得 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关.

令 $$l_1:\frac{x-a_2}{a_1}=\frac{y-b_2}{b_1}=\frac{z-c_2}{c_1}=k,\ l_2:\frac{x-a_3}{a_2}=\frac{y-b_3}{b_2}=\frac{z-c_3}{c_2}=t,$$

l_1,l_2 相交于一点，则 $a_3=(1-t)a_2+ka_1,b_3=(1-t)b_2+kb_1,c_3=(1-t)c_2+kc_1$，因此 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出.

7.【答案】D

【解析】A,B,C 恰有一个事件发生的概率为 $p=P(\overline{A}\,\overline{B}C)+P(\overline{A}B\overline{C})+P(A\overline{B}\,\overline{C})$，而

$$P(\overline{A}\,\overline{B}C)=P(C)-P(C(A+B))=P(C)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{12}-\frac{1}{12}=\frac{1}{12},$$
$$P(\overline{A}B\overline{C})=P(B)-P(B(A+C))=P(B)-P(AB)-P(BC)+P(ABC)$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{1}{6},$$
$$P(A\overline{B}\,\overline{C})=P(A)-P(A(B+C))=P(A)-P(AB)-P(AC)+P(ABC)$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{1}{6},$$

因此 $P(\overline{A}\,\overline{B}C)+P(\overline{A}B\overline{C})+P(A\overline{B}\,\overline{C})=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$.

8.【答案】B

【解析】由题知 $E(X)=\frac{1}{2},D(X)=\frac{1}{4}$，则由中心极限定理可知，随机变量 $\sum\limits_{i=1}^{100}X_i$ 近似服从 $N(50,25)$，则 $P\left\{\sum\limits_{i=1}^{100}X_i\leqslant 55\right\}=P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{100}X_i-50}{5}\leqslant 1\right\}=\Phi(1)$.

二、填空题

9.【答案】-1

【解析】$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-e^x+1}{(e^x-1)\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-e^x+1}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-e^x}{2x}=\lim_{x\to 0}\left[-\frac{\frac{1}{(1+x)^2}+e^x}{2}\right]=-1.$$

10.【答案】$-\sqrt{2}$

【解析】$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{1}{t},\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)/dt}{dx/dt}=\dfrac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}=-\dfrac{\sqrt{1+t^2}}{t^3}$,

将 $t=1$ 代入，得$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=-\sqrt{2}$.

11.【答案】$n+am$

【解析】$f(x)$ 满足的微分方程的特征方程为 $\lambda^2+a\lambda+1=0$,

解得其特征根为 $\lambda_1=\dfrac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2},\lambda_2=\dfrac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2}$,

因此 $f(x)=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$ (C_1,C_2 为任意常数)，$f'(x)=C_1\lambda_1e^{\lambda_1x}+C_2\lambda_2e^{\lambda_2x}$.

由于 $a>0$，则 $\lambda_1,\lambda_2<0$，那么 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$，所以

$$\int_0^{+\infty}f(x)dx=-\int_0^{+\infty}[f''(x)+af'(x)]dx=-f'(x)\Big|_0^{+\infty}-af(x)\Big|_0^{+\infty}$$

$$=f'(0)+af(0)=n+am.$$

12.【答案】$4e$

【解析】$\dfrac{\partial f}{\partial x}=ye^{x^3y^2}+\int_0^{xy}t^2e^{xt^2}dt,\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=e^{x^3y^2}+3x^3y^2e^{x^3y^2}$,

因此$\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=4e$.

13.【答案】$a^2(a^2-4)$

【解析】$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1\\ 0 & a & 1 & -1\\ -1 & 1 & a & 0\\ 1 & -1 & 0 & a\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1\\ 1 & a & 1 & -1\\ 1 & 1 & a & 0\\ 1 & -1 & 0 & a\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & a & 2 & -2\\ 0 & 1 & a+1 & -1\\ 0 & -1 & 1 & a-1\end{vmatrix}$

$$=a\begin{vmatrix} a & 2 & -2\\ 1 & a+1 & -1\\ -1 & 1 & a-1\end{vmatrix}=a^2(a^2-4).$$

14.【答案】$\dfrac{2}{\pi}$

【解析】由题意可得 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & 其他,\end{cases}$

则 $$E(X)=0,E(XY)=E(X\sin X)=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx=\frac{2}{\pi},$$

因此 $$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{2}{\pi}.$$

三、解答题

15.【解析】由$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=3x^2-y=0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=24y^2-x=0,\end{cases}$ 得$\begin{cases}x=0,\\ y=0\end{cases}$或$\begin{cases}x=\dfrac{1}{6},\\ y=\dfrac{1}{12},\end{cases}$

且
$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x,B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-1,C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=48y,$$

在点$(0,0)$处，$A=0,B=-1,C=0$，因为$B^2-AC>0$，故$(0,0)$不是$f(x,y)$的极值点.

在点$\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)$处，$A=1,B=-1,C=4$，因为$B^2-AC<0,A>0$，故$\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)$为$f(x,y)$的极小值点，极小值$f\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)=-\frac{1}{216}$.

因此函数$f(x,y)$的极小值为$-\frac{1}{216}$.

16.【解析】令L_0为$4x^2+y^2=r^2(r>0)$，逆时针方向为正方向，设L与L_0围成的区域为D，L_0围成的区域为D_1，则
$$I=\int_{L+L_0^-}\frac{4x-y}{4x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{4x^2+y^2}dy+\int_{L_0}\frac{4x-y}{4x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{4x^2+y^2}dy,$$
由格林公式可知
$$\int_{L+L_0^-}\left[\frac{(4x^2+y^2)+(4x-y)\cdot 2y}{(4x^2+y^2)^2}+\frac{(4x^2+y^2)-(x+y)\cdot 8x}{(4x^2+y^2)^2}\right]dx\,dy=0,$$
$$\int_{L_0}\frac{4x-y}{r^2}dx+\frac{x+y}{r^2}dy=\frac{1}{r^2}\int_{L_0}(1+1)dx\,dy=\frac{2}{r^2}\cdot S_{D_1}=\frac{2}{r^2}\cdot\pi\cdot r\cdot\frac{r}{2}=\pi.$$
因此，$I=\pi$.

17.【解析】令$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+\frac{1}{2}}{n+1}=1$，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径$R=1$，令$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$，

则当$|x|<1$时，$S(x)$收敛.
$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)a_nx^n$$
$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\frac{1}{2}S(x)=1+x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+\frac{1}{2}S(x)=1+xS'(x)+\frac{1}{2}S(x),$$
从而有
$$S'(x)-\frac{1}{2(1-x)}S(x)=\frac{1}{1-x}\Rightarrow\sqrt{1-x}\left[S'(x)-\frac{1}{2(1-x)}S\right]=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$$
$$\Rightarrow\left[\sqrt{1-x}S(x)\right]'=\frac{1}{\sqrt{1-x}},$$

解得

$$S(x)=\left(\int\frac{1}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x\right)(1-x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=(-2\sqrt{1-x}+c)(1-x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=-2+\frac{c}{\sqrt{1-x}}(c\text{ 为任意常数}),$$

由 $S(0)=0$，得 $c=2$，故 $S(x)=\dfrac{2}{\sqrt{1-x}}-2$.

18.【解析】设 Σ 的单位法向量为 $\boldsymbol{n}$，

$$z_x=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$z_y=\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

则法向量 $\boldsymbol{n}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(z_x,z_y,-1)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(z_x,z_y,-1)$.

$$\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\cos\alpha\mathrm{d}S=\boldsymbol{n}\cdot(1,0,0)\mathrm{d}S=\frac{\sqrt{2}}{2}z_x\mathrm{d}S=\frac{\sqrt{2}x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}S,$$

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}z=\cos\beta\mathrm{d}S=\boldsymbol{n}\cdot(0,1,0)\mathrm{d}S=\frac{\sqrt{2}y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}S,$$

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\cos r\mathrm{d}S=\boldsymbol{n}\cdot(0,0,1)\mathrm{d}S=-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{d}S.$$

不妨设 $D:1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$，则

$$I=\iint_{\Sigma}\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{x^2f(xy)+2x^2-xy+y^2f(xy)+2y^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-zf(xy)-z\right]\mathrm{d}S$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\iint_{\Sigma}\left[\frac{(x^2+y^2)f(xy)+2x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}-\sqrt{x^2+y^2}(f(xy)+1)\right]\mathrm{d}S$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\iint_{\Sigma}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}S=\iint_{D}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{14\pi}{3}.$$

19.【证明】(1) 不妨设 $|f(c)|=M$，f 在 $[0,2]$ 上连续可导，故由中值定理，存在 $\xi_1\in(0,c)$，$\xi_2\in(c,2)$，

使得
$$\begin{cases}M=|f(c)-f(0)|=|f'(\xi_1)|c,\\ M=|f(2)-f(c)|=|f'(\xi_2)|(2-c)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left|f'(\xi_1)\right|=\dfrac{M}{c},\\ \left|f'(\xi_2)\right|=\dfrac{M}{2-c},\end{cases}$$

故取 $\xi=\begin{cases}\xi_1, & 0<c\leqslant 1,\\ \xi_2, & 1<c<2,\end{cases}$ 显然有 $|f'(\xi)|\geqslant M$.

(2) 由(1)知，存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $|f'(\xi)|\geqslant M$，当且仅当 $c=1$ 时取等号.

若 $f(1)=M$，令 $F(x)=f(x)-Mx$，则 $F'(x)=f'(x)-M\leqslant 0$.

又 $F(0)=F(1)=0$，故 $F(x)\equiv 0, x\in[0,1]$，即

$$f(x)\equiv Mx, x\in[0,1],$$

故 $f'(x)\equiv M, x\in[0,1]$，由于 $f'(1)=0$，故 $M\equiv 0$.

同理若 $f(1)=-M$，也可得 $M=0$.

20.【解析】(1) 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a & 2\\ 2 & b\end{pmatrix}$，由题意可得，

$$f(x_1,x_2)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQY},$$

$$g(y_1,y_2)=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BY},$$

因为 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值. 由

$$0=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2\\ 2 & \lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-4)-4=\lambda^2-5\lambda,$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=0, \lambda_2=5$.

由 $$0=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda-a & -2\\ -2 & \lambda-b\end{vmatrix}=(\lambda-a)(\lambda-b)-4,$$

得 $\begin{cases}(0-a)(0-b)-4=0,\\ (5-a)(5-b)-4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=4,\\ b=1.\end{cases}$

(2) 由题意可得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}$，即 $\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}$.

对于矩阵 $\boldsymbol{A}$：

特征值 $\lambda=0$ 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$，单位化得 $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，

特征值 $\lambda=5$ 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$，单位化得 $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$，则令

$$\boldsymbol{Q}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix},$$

从而 $\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}_1=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$.

对于矩阵 $\boldsymbol{B}$：

特征值 $\lambda=0$ 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$，单位化得 $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$，

特征值 $\lambda=5$ 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$，单位化得 $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$，则令

$$Q_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1&2\\2&1\end{pmatrix},$$

从而 $Q_2^{\mathrm{T}}BQ_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&5\end{pmatrix}$. 因此

$$B=Q_2\begin{pmatrix}0&0\\0&5\end{pmatrix}Q_2^{\mathrm{T}}=Q_2Q_1^{\mathrm{T}}AQ_1Q_2^{\mathrm{T}},$$

令 $Q=Q_1Q_2^{\mathrm{T}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1&2\\2&1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-4&3\\3&4\end{pmatrix}$，即为所求正交矩阵.

21. (1)【证明】反证法：若 P 为不可逆矩阵，则 $\boldsymbol{\alpha},A\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关，即存在 λ，使得 $A\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，这与 $\boldsymbol{\alpha}$ 不是 A 的特征向量矛盾，故假设不成立.

(2)【解析】$AP=A(\boldsymbol{\alpha},A\boldsymbol{\alpha})=(A\boldsymbol{\alpha},A^2\boldsymbol{\alpha})=(A\boldsymbol{\alpha},6\boldsymbol{\alpha}-A\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\alpha},A\boldsymbol{\alpha})\begin{pmatrix}0&6\\1&-1\end{pmatrix}$，

故 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&6\\1&-1\end{pmatrix}$.

令 $B=\begin{pmatrix}0&6\\1&-1\end{pmatrix}$，故 $A\sim B$.

由 $$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda&-6\\-1&\lambda+1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)-6=(\lambda-2)(\lambda+3)=0,$$

得 B 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=-3$.

由于 $\lambda_1\neq\lambda_2$，故 B 必有两个线性无关的特征向量，因此 B 相似于对角矩阵 $\begin{pmatrix}2&0\\0&-3\end{pmatrix}$.

从而 A 相似于对角矩阵 $\begin{pmatrix}2&0\\0&-3\end{pmatrix}$.

22. (1)【解析】由题意可得，

$$P\{X_1\leqslant x,Y\leqslant y\}=\frac{1}{2}P\{X_1\leqslant x,X_1\leqslant y\}+\frac{1}{2}P\{X_1\leqslant x,X_2\leqslant y\}.$$

令 $I_1=\frac{1}{2}P\{X_1\leqslant x,X_1\leqslant y\},I_2=\frac{1}{2}P\{X_1\leqslant x,X_2\leqslant y\}$，

显然

$$I_1=\begin{cases}\frac{1}{2}\Phi(x), & x\leqslant y,\\ \frac{1}{2}\Phi(y), & x>y,\end{cases}\qquad I_2=\frac{1}{2}\Phi(x)\Phi(y).$$

则 $F(X_1,Y)=P\{X_1\leqslant x,Y\leqslant y\}=I_1+I_2=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\Phi(x)[1+\Phi(y)], & x\leqslant y,\\ \dfrac{1}{2}\Phi(y)[1+\Phi(x)], & x>y.\end{cases}$

(2)【证明】

$$\begin{aligned}F_Y(t)&=P\{Y\leqslant t\}=P\{X_3=0,Y\leqslant t\}+P\{X_3=1,Y\leqslant t\}\\&=P\{X_3=0\}P\{X_2\leqslant t\}+P\{X_3=1\}P\{X_1\leqslant t\}\\&=\frac{1}{2}\Phi(t)+\frac{1}{2}\Phi(t)\\&=\Phi(t),\end{aligned}$$

故 $Y\sim N(0,1)$.

23.【解析】(1)$P\{T>t\}=1-F(t)=e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}$,

$$P\{T>s+t\mid T>s\}=\frac{P\{T>s,T>t+s\}}{P\{T>s\}}=\frac{e^{-\left(\frac{t+s}{\theta}\right)^m}}{e^{-\left(\frac{s}{\theta}\right)^m}}=e^{\frac{s^m-(t+s)^m}{\theta^m}}.$$

(2)T 的概率密度函数 $f(t)=\begin{cases}e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}\dfrac{mt^{m-1}}{\theta^m}, t>0,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

则似然函数为

$$L(\theta)=\frac{m^n}{\theta^{mn}}(t_1\cdots t_n)^{m-1}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}t_i^m}{\theta^m}}.$$

取对数 $\qquad \ln L(\theta)=n\ln m-mn\ln\theta+(m-1)\sum_{i=1}^{n}\ln t_i-\theta^{-m}\sum_{i=1}^{n}t_i^m$.

由 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\dfrac{-mn}{\theta}+\left(\sum_{i=1}^{n}t_i^m\right)m\theta^{-m-1}=0$,解得 $\theta=\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n}t_i^m}{n}\right)^{\frac{1}{m}}$,

故 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n}T_i^m}{n}\right)^{\frac{1}{m}}$.