2019 年全国硕士研究生招生考试

数学（三）

（科目代码:303）

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

1. 当 $x\to 0$ 时,若 $x-\tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小量,则 $k=$

A. 1.　　B. 2.　　C. 3.　　D. 4.

2. 已知方程 $x^5-5x+k=0$ 有 3 个不同的实根,则 k 的取值范围是

A. $(-\infty,-4)$.　　B. $(4,+\infty)$.

C. $\{-4,4\}$.　　D. $(-4,4)$.

3. 已知微分方程 $y''+ay'+by=ce^x$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+e^x$,则 a,b,c 依次为

A. 1,0,1.　　B. 1,0,2.　　C. 2,1,3.　　D. 2,1,4.

4. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nu_n$ 绝对收敛,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{v_n}{n}$ 条件收敛,则

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$ 条件收敛.　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$ 绝对收敛.

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛.　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 发散.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 4 阶矩阵,$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.若线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中只有 2 个向量,则 $r(\boldsymbol{A}^*)=$

A. 0.　　B. 1.　　C. 2.　　D. 3.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵,$\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵.若 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$,且 $|\boldsymbol{A}|=4$,则二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 的规范形为

A. $y_1^2+y_2^2+y_3^2$.　　B. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

C. $y_1^2-y_2^2-y_3^2$.　　D. $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

7. 设 A,B 为随机事件,则 $P(A)=P(B)$ 的充分必要条件是

A. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.　　B. $P(AB)=P(A)P(B)$.

C. $P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$.　　D. $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$.

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且都服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,则 $P\{|X-Y|<1\}$

A. 与 μ 无关,而与 σ^2 有关.　　B. 与 μ 有关,而与 σ^2 无关.

C. 与 μ,σ^2 都有关.　　D. 与 μ,σ^2 都无关.

二、填空题:9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]^n=$________.

10. 曲线 $y=x\sin x+2\cos x\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 的拐点坐标为________.

11. 已知函数 $f(x)=\int_1^x\sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t$,则 $\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x=$________.

12. 以 p_A,p_B 分别表示 A,B 两种商品的价格,设商品 A 的需求函数为

$$Q_A=500-p_A^2-p_Ap_B+2p_B^2,$$

则当 $p_A=10,p_B=20$ 时,商品 A 的需求量对自身价格的弹性 $\eta_{AA}(\eta_{AA}>0)$ 为________.

13. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&-1\\0&1&a^2-1\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\a\end{pmatrix}$. 若线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解,则

$a=$________.

14. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & 0<x<2,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ $F(x)$ 为 X 的分布函数,$E(X)$ 为 X 的数学期望,则 $P\{F(X)>E(X)-1\}=$________.

三、解答题:15 ~ 23 小题,共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^{2x}, & x>0,\\ x\mathrm{e}^x+1, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 求 $f'(x)$,并求 $f(x)$ 的极值.

16.(本题满分 10 分)

设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数,函数 $g(x,y)=xy-f(x+y,x-y)$,

求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

17.（本题满分 10 分）

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y' - xy = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(1)=\sqrt{e}$ 的特解.

(1) 求 $y(x)$；

(2) 设平面区域 $D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant y(x)\}$，求 D 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.

18.（本题满分 10 分）

求曲线 $y=e^{-x}\sin x\ (x\geqslant 0)$ 与 x 轴之间图形的面积.

19.（本题满分 10 分）

设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx\ (n=0,1,2,\cdots)$.

(1) 证明：数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}\ (n=2,3,\cdots)$；

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$.

20.（本题满分 11 分）

已知向量组

Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,4)^T, \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,4)^T, \boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,a^2+3)^T$；

Ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,a+3)^T, \boldsymbol{\beta}_2=(0,2,1-a)^T, \boldsymbol{\beta}_3=(1,3,a^2+3)^T$.

若向量组 Ⅰ 与向量组 Ⅱ 等价，求 a 的取值，并将 $\boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

21.(本题满分 11 分)

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1\\ 2 & x & -2\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & y\end{pmatrix}$ 相似.

(1) 求 x,y；

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

22.(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 服从参数为 1 的指数分布，Y 的概率分布为 $P\{Y=-1\}=p$，$P\{Y=1\}=1-p(0<p<1)$. 令 $Z=XY$.

(1) 求 Z 的概率密度；

(2) p 为何值时，X 与 Z 不相关？

(3) X 与 Z 是否相互独立？

23.(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x;\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\geqslant\mu,\\ 0, & x<\mu,\end{cases}$ 其中 μ 是已知参数，$\sigma>0$ 是未知参数，A 是常数. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求 A；

(2) 求 σ^2 的最大似然估计量.

2019 年数学(三)答案解析

一、选择题

1.【答案】C

【解析】$\tan x$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开式为 $\tan x = x+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^k},$$

若 $x-\tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小量，则 $k=3$.

2.【答案】D

【解析】令 $f(x)=x^5-5x+k$，则 $f'(x)=5x^4-5=5(x^2-1)(x^2+1)$，

而当 $x<-1$ 时，$f'(x)>0$；当 $-1<x<1$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，

则 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极大值，在 $x=1$ 处取得极小值.

又因 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，

若 $f(x)=0$ 有 3 个不同的实根，则需 $f(-1)>0$，$f(1)<0$，得 $k+4>0$，$k-4<0$，

即 $k\in(-4,4)$.

3.【答案】D

【解析】由非齐次线性微分方程通解的结构可知，$y=e^x$ 为原微分方程的特解，将其代入原微分方程得 $1+a+b=c$.

对应的齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的特征方程为 $\lambda^2+a\lambda+b=0$，

由解的结构可知上述齐次方程的特征根为-1，且为二重根，由此可解得 $a=2$，$b=1$，则 $c=4$.

4.【答案】B

【解析】由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{v_n}{n}$ 条件收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{v_n}{n}=0$，则存在常数 $M>0$，使 $\left|\dfrac{v_n}{n}\right|<M$. 又

$$0<|u_nv_n|=|nu_n|\cdot\left|\frac{v_n}{n}\right|<M\cdot|nu_n|,$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}Mnu_n$ 绝对收敛，则由比较原则可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_nv_n|$ 收敛，

因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$ 绝对收敛.

5.【答案】A

【解析】线性方程组 $\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中只有两个向量，则 $r(\boldsymbol{A})=2<4$，因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中每个元素的代数余子式都为 0，故 $r(\boldsymbol{A}^*)=0$.

6.【答案】C

【解析】设 λ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{\alpha}$ 为其对应的特征向量，则

$$(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}=(\lambda^2+\lambda-2)\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0},$$

因此 $\lambda^2+\lambda-2=0$，从而解得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=-2$.

由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为3阶矩阵且 $|\boldsymbol{A}|=4$，故 $\lambda_2=-2$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的二重根，因此二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的负惯性指数为2，正惯性指数为1，故其规范形为 $y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

7.【答案】C

【解析】$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB),P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)$,

因此 $P(A)=P(B)\Leftrightarrow P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$.

8.【答案】A

【解析】由题意可得，$X-Y\sim N(0,2\sigma^2)$，则

$$P\{|X-Y|<1\}=P\{-1<X-Y<1\}=\frac{1}{2\sqrt{\pi\sigma^2}}\int_{-1}^{1}e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}}dx\ ,$$

因此与 μ 无关，而与 σ^2 有关.

二、填空题

9.【答案】e^{-1}

【解析】$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right]^n$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)\cdot\left(-\frac{n}{n+1}\right)}=\lim_{n\to\infty}e^{-\frac{n}{n+1}}=e^{-1}.$$

10.【答案】$(\pi,-2)$

【解析】$y'=-\sin x+x\cos x,y''=-x\sin x$，令 $y''=0$，解得 $x=0,x=\pi$，

当 $-\frac{\pi}{2}<x<0$ 时，$y''<0$，当 $0<x<\pi$ 时，$y''<0$，当 $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$ 时，$y''>0$，

因此曲线的拐点坐标为 $(\pi,-2)$.

11.【答案】$\frac{1-2\sqrt{2}}{18}$

【解析】$\int_0^1 x^2f(x)dx=\int_0^1 x^2dx\int_1^x\sqrt{1+t^4}dt=-\int_0^1 x^2dx\int_x^1\sqrt{1+t^4}dt$，

将该二次积分的积分区域转化为 $D=\{(x,t)|0\leqslant t\leqslant1,0\leqslant x\leqslant t\}$，则

$$\int_0^1 x^2f(x)dx=-\int_0^1\sqrt{1+t^4}dt\int_0^t x^2dx=-\frac{1}{3}\int_0^1 t^3\sqrt{1+t^4}dt$$

$$=-\frac{1}{18}(1+t^4)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{1-2\sqrt{2}}{18}.$$

12.【答案】0.4

【解析】$\eta_{AA}=-\dfrac{\dfrac{dQ_A}{dp_A}}{\dfrac{Q_A}{p_A}}=\dfrac{(2p_A+p_B)p_A}{500-p_A^2-p_Ap_B+2p_B^2}$，

当 $p_A=10,p_B=20$ 时，$\eta_{AA}=\dfrac{400}{500-100-200+800}=0.4$.

13.【答案】1

【解析】若线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解，则 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<3$.

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&0\\1&1&-1&1\\0&1&a^2-1&a\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&0\\0&1&0&1\\0&1&a^2-1&a\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&0\\0&1&0&1\\0&0&a^2-1&a-1\end{array}\right),$$

因此要使 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<3$，则需 $a-1=a^2-1=0$，故 $a=1$.

14.【答案】$\dfrac{2}{3}$

【解析】由题意可得，$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x^2}{4}, & 0\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2,\end{cases}$ $E(X)=\int_0^2\dfrac{x^2}{2}dx=\dfrac{4}{3}$，则

$$P\{F(X)>E(X)-1\}=P\left\{\frac{X^2}{4}>\frac{1}{3}\right\}=P\left\{X>\sqrt{\frac{4}{3}}\right\}+P\left\{X<-\sqrt{\frac{4}{3}}\right\}$$

$$=P\left\{X>\sqrt{\frac{4}{3}}\right\}=\int_{\sqrt{\frac{4}{3}}}^2\frac{x}{2}dx=\frac{2}{3}.$$

三、解答题

15.【解析】当 $x>0$ 时，$f'(x)=(e^{2x\ln x})'=e^{2x\ln x}\cdot(2x\ln x)'=2x^{2x}(1+\ln x)$；

当 $x<0$ 时，$f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$.

注意到 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)\neq\lim\limits_{x\to0^-}f'(x)$，故 $x=0$ 为不可导点，

即 $f'(x)=\begin{cases}2x^{2x}(1+\ln x), & x>0,\\ (1+x)e^x, & x<0,\end{cases}$

故 $f'(x)=0$ 的解为 $x_1=-1,x_2=\dfrac{1}{e}$.

当 $x<-1$ 时，$f'(x)<0$；

当 $-1<x<0$ 时，$f'(x)>0$；

当 $0<x<\dfrac{1}{e}$ 时，$f'(x)<0$；

当 $x>\dfrac{1}{e}$ 时，$f'(x)>0$.

故 $x=-1$ 和 $x=\frac{1}{e}$ 均为 $f(x)$ 的极小值点，则 $f(x)$ 的极小值为

$$f(-1)=1-\frac{1}{e},f\left(\frac{1}{e}\right)=\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{2}{e}};$$

$x=0$ 为 $f(x)$ 的极大值点，则 $f(x)$ 的极大值为 $f(0)=1$.

16.【解析】记 $f_u=\frac{\partial f}{\partial u},f_v=\frac{\partial f}{\partial v}$. 令 $u=x+y,v=x-y$，则

$$\frac{\partial g}{\partial x}=y-f_u u_x-f_v v_x=y-f_u-f_v,$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}=x-f_u u_y-f_v v_y=x-f_u+f_v,$$

进而

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=-(f_{uu}u_x+f_{uv}v_x+f_{vu}u_x+f_{vv}v_x)=-(f_{uu}+2f_{uv}+f_{vv}),$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}=1-(f_{uu}u_y+f_{uv}v_y+f_{vu}u_y+f_{vv}v_y)=1-(f_{uu}-f_{vv}),$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=f_{vu}u_y+f_{vv}v_y-f_{uv}v_y-f_{uu}u_y=2f_{uv}-f_{uu}-f_{vv},$$

故原式 $=1-3f_{uu}-f_{vv}$.

17.【解析】(1) 将原微分方程整理为 $(e^{-\frac{x^2}{2}}y)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$,

故 $e^{-\frac{x^2}{2}}y=\int\frac{1}{2\sqrt{x}}dx+C$，因此 $y=Ce^{\frac{x^2}{2}}+\sqrt{x}\,e^{\frac{x^2}{2}}$,

由 $y(1)=\sqrt{e}$ 可知 $C=0$，故 $y=\sqrt{x}\,e^{\frac{x^2}{2}}$.

(2) $V=\int_1^2\pi(\sqrt{x}\,e^{\frac{x^2}{2}})^2dx=\int_1^2\pi x e^{x^2}dx=\frac{\pi}{2}\int_1^2 e^{x^2}d(x^2)=\frac{\pi}{2}(e^4-e)$.

18.【解析】令 $I=\int_0^{+\infty}e^{-x}|\sin x|dx$，则

$$I=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}(-1)^n e^{-x}\sin x\,dx.$$

令 $I_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}(-1)^n e^{-x}\sin x\,dx$，则

当 n 为偶数时，

$$\begin{aligned}I_n&=-\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\sin x\,d(e^{-x})=-e^{-x}\sin x\Big|_{n\pi}^{(n+1)\pi}+\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-x}\cos x\,dx\\&=-\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\cos x\,d(e^{-x})=-e^{-x}\cos x\Big|_{n\pi}^{(n+1)\pi}-\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-x}\sin x\,dx\\&=e^{-n\pi}\cos n\pi-e^{-(n+1)\pi}\cos(n+1)\pi-I_n\\&=e^{-n\pi}+e^{-(n+1)\pi}-I_n\Rightarrow I_n=\frac{e^{-n\pi}+e^{-(n+1)\pi}}{2},\end{aligned}$$

同理可得当 n 为奇数时，

$$I_n=\frac{e^{-n\pi}+e^{-(n+1)\pi}}{2},$$

故 $I=\sum\limits_{n=0}^{\infty}I_n=\frac{1}{2}\times\left(1+2\times\frac{e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{e^{\pi}-1}.$

19. (1)【证明】显然 $0<\frac{x^{n+1}\sqrt{1-x^2}}{x^n\sqrt{1-x^2}}=x<1$，对任意 $x\in(0,1)$ 都成立，

故 $0<\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$，即 $\{a_n\}$ 单调减少.

令 $x=\sin t$，则

$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\cos^2 t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}t\,dt.$$

令 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,dt$，则 $a_n=I_n-I_{n+2}$，$a_{n-2}=I_{n-2}-I_n$.

由于 $I_n=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}t\,d(\cos t)=-\sin^{n-1}t\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,d(\sin^{n-1}t)$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\sin^{n-2}t\,dt=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}t\,dt-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,dt.$$

$$=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n,$$

可得 $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$.

故

$$a_n=I_n-I_{n+2}=I_n-\frac{n+1}{n+2}I_n=\frac{1}{n+2}I_n,$$

$$a_{n-2}=I_{n-2}-I_n=\frac{n}{n-1}I_n-I_n=\frac{1}{n-1}I_n,$$

因此 $a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}\ (n=2,3,\cdots)$.

(2)【解析】由于 $a_n<a_{n-1}<a_{n-2}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_n}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+2}=1$，

故由夹逼定理，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=1$.

20.【解析】

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&1\\1&0&2&1&2&3\\4&4&a^2+3&a+3&1-a&a^2+3\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&1\\0&-1&1&0&2&2\\0&0&a^2-1&a-1&1-a&a^2-1\end{array}\right),$$

当 $a=-1$ 时，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=2$，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=3$，向量组 Ⅰ 与向量组 Ⅱ 不等价.

当 $a=1$ 时，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=2$，向量组 Ⅰ 与向量组 Ⅱ 等价.

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3)=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\1&0&2&3\\4&4&4&4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&2&3\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

可知 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_3$ 的通解为 $\boldsymbol{X}=k\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}$（$k$ 为任意常数），

故 $\boldsymbol{\beta}_3=(3-2k)\boldsymbol{\alpha}_1+(-2+k)\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3$（$k$ 为任意常数）.

当 $a\neq\pm1$ 时，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=3$，向量组 Ⅰ 与向量组 Ⅱ 等价.

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3)=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\1&0&2&3\\4&4&a^2+3&a^2+3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{array}\right),$$

可知 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_3$ 的通解为 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，故 $\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

21.【解析】(1) 由 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似知，$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$ 且 $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}=\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}$，故

$$\begin{cases}4x-8=-2y,\\-4+x=y+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3,\\y=-2.\end{cases}$$

(2) 首先求 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征值，由

$$0=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0\\0&\lambda+1&0\\0&0&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda+1),$$

知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1=-2,\lambda_2=-1,\lambda_3=2$.

当 $\lambda=-2$ 时，$\boldsymbol{A}$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{Y}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$；

当 $\lambda=-1$ 时，$\boldsymbol{A}$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{X}_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{Y}_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}$；

当 $\lambda=2$ 时，$\boldsymbol{A}$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{X}_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{Y}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{Q}_1=\begin{pmatrix}-1&-2&-1\\2&1&2\\4&0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Q}_2=\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&3&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，

则有 $\boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1=\begin{pmatrix}-2&&\\&-1&\\&&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Q}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2=\begin{pmatrix}-2&&\\&-1&\\&&2\end{pmatrix}$，那么所求矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\2&1&2\\0&0&4\end{pmatrix}.$$

22.【解析】(1) 由题知 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 0,\\0, & x<0.\end{cases}$$

当 $t>0$ 时，

$$\begin{aligned}P\{Z\leqslant t\}&=P\{Y=1,X\leqslant t\}+P\{Y=-1,-X\leqslant t\}\\&=(1-p)P\{X\leqslant t\}+p\times P\{X\geqslant -t\}\\&=(1-p)(1-\mathrm{e}^{-t})+p.\end{aligned}$$

当 $t\leqslant 0$ 时，$P\{Z\leqslant t\}=(1-p)P\{X\leqslant t\}+p\times P\{X\geqslant -t\}=p\mathrm{e}^{t}$.

故 Z 的概率密度 $f(t)=\begin{cases}p\mathrm{e}^{t}, & t\leqslant 0,\\(1-p)\mathrm{e}^{-t}, & t>0.\end{cases}$

(2) 由题知 $E(Z)=E(XY)=1-2p$.

$E(XZ)=E(X^2Y)=E(X^2)E(Y)=[D(X)+E^2(X)]E(Y)=2(1-2p)$，

$\mathrm{Cov}(X,Z)=E(XZ)-E(X)E(Z)=1-2p$，

故当 $p=\dfrac{1}{2}$ 时，$\mathrm{Cov}(X,Z)=0$，即 X 与 Z 不相关.

(3) 设 $F(x,z)$ 为 (X,Z) 的联合分布函数，则

$$F(1,-1)=P\{X\leqslant 1,XY\leqslant -1\}=0,$$

而 $\qquad F_X(1)=P\{X\leqslant 1\}=1-\mathrm{e}^{-1}$，$F_Z(-1)=P\{Z\leqslant -1\}=p\mathrm{e}^{-1}$，

有 $\qquad F(1,-1)\neq F_X(1)F_Z(-1)$，

所以 X 与 Z 不相互独立.

23.【解析】(1) $1=\int_{\mu}^{+\infty}\frac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx \xlongequal{y=x-\mu} \int_{0}^{+\infty}\frac{A}{\sigma}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy=\frac{1}{2}A\cdot\sqrt{2\pi}$,

故 $A=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

(2) 似然函数 $L(\sigma^2)=f(x_1;\sigma^2)\cdots f(x_n;\sigma^2)=\frac{A^n}{\sigma^n}e^{-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$,

取对数为
$$\ln L(\sigma^2)=n\ln A-n\ln\sigma-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2},$$

令
$$\frac{d}{d\sigma^2}\ln L(\sigma^2)=-\frac{n}{2\sigma^2}+\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\cdot\frac{1}{2\sigma^4}=0,$$

得到 σ^2 的最大似然估计量为

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2.$$