2019年全国硕士研究生招生考试

数 学 （一）

（科目代码:301）

一、选择题:1～8小题,每小题4分,共32分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是最符合题目要求的.

1. 当 $x\to 0$ 时,若 $x-\tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小量,则 $k=$

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x|x|, & x\leqslant 0, \\ x\ln x, & x>0, \end{cases}$ 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的

A. 可导点,极值点. B. 不可导点,极值点.

C. 可导点,非极值点. D. 不可导点,非极值点.

3. 设 $\{u_n\}$ 是单调增加的有界数列,则下列级数中收敛的是

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{n}$. B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{u_n}$.

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$. D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}^2-u_n^2)$.

4. 设函数 $Q(x,y)=\dfrac{x}{y^2}$. 如果对上半平面 $(y>0)$ 内的任意有向光滑封闭曲线 C 都有 $\oint_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$,那么函数 $P(x,y)$ 可取为

A. $y-\dfrac{x^2}{y^3}$. B. $\dfrac{1}{y}-\dfrac{x^2}{y^3}$.

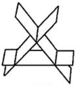
C. $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$. D. $x-\dfrac{1}{y}$.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是3阶实对称矩阵,$\boldsymbol{E}$ 是3阶单位矩阵.若 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$,且 $|\boldsymbol{A}|=4$,则二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的规范形为

A. $y_1^2+y_2^2+y_3^2$. B. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

C. $y_1^2-y_2^2-y_3^2$. D. $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

6. 如图所示，有 3 张平面两两相交，交线相互平行，它们的方程 $a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=d_i(i=1,2,3)$ 组成的线性方程组的系数矩阵和增广矩阵分别记为 $\boldsymbol{A}$，$\overline{\boldsymbol{A}}$，则



6 题图

A. $r(\boldsymbol{A})=2, r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$.　　B. $r(\boldsymbol{A})=2, r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$.

C. $r(\boldsymbol{A})=1, r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$.　　D. $r(\boldsymbol{A})=1, r(\overline{\boldsymbol{A}})=1$.

7. 设 A，B 为随机事件，则 $P(A)=P(B)$ 的充分必要条件是

A. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.　　B. $P(AB)=P(A)P(B)$.

C. $P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$.　　D. $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$.

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则 $P\{|X-Y|<1\}$

A. 与 μ 无关，而与 σ^2 有关.　　B. 与 μ 有关，而与 σ^2 无关.

C. 与 μ,σ^2 都有关.　　D. 与 μ,σ^2 都无关.

二、填空题：9 ～ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

9. 设函数 $f(u)$ 可导，$z=f(\sin y-\sin x)+xy$，则 $\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{\cos y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________.

10. 微分方程 $2yy'-y^2-2=0$ 满足条件 $y(0)=1$ 的特解 $y=$________.

11. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^n$ 在 $(0,+\infty)$ 内的和函数 $S(x)=$________.

12. 设 Σ 为曲面 $x^2+y^2+4z^2=4(z\geqslant 0)$ 的上侧，则 $\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$________.

13. 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 为 3 阶矩阵，若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，且 $\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为________.

14. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & 0<x<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ $F(x)$ 为 X 的分布函数，$E(X)$ 为 X 的数学期望，则 $P\{F(X)>E(X)-1\}=$________.

三、解答题：15 ～ 23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本题满分 10 分）

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'+xy=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(0)=0$ 的特解.

（1）求 $y(x)$；

（2）求曲线 $y=y(x)$ 的凹凸区间及拐点.

16.（本题满分 10 分）

设 a,b 为实数，函数 $z=2+ax^2+by^2$ 在点(3,4)处的方向导数中，沿方向 $\boldsymbol{l}=-3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$ 的方向导数最大，最大值为 10.

(1) 求 a,b；

(2) 求曲面 $z=2+ax^2+by^2(z\geqslant 0)$ 的面积.

17.（本题满分 10 分）

求曲线 $y=\mathrm{e}^{-x}\sin x(x\geqslant 0)$ 与 x 轴之间图形的面积.

18.（本题满分 10 分）

设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x(n=0,1,2,\cdots)$.

(1) 证明：数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}(n=2,3,\cdots)$；

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$.

19.（本题满分 10 分）

设 Ω 是由锥面 $x^2+(y-z)^2=(1-z)^2(0\leqslant z\leqslant 1)$ 与平面 $z=0$ 围成的锥体，求 Ω 的形心坐标.

20.（本题满分 11 分）

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,3,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,a,3)^{\mathrm{T}}$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基，$\boldsymbol{\beta}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 在这个基下的坐标为 $(b,c,1)^{\mathrm{T}}$.

(1) 求 a,b,c；

(2) 证明：$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基，并求 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵.

21.（本题满分 11 分）

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1\\ 2 & x & -2\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & y\end{pmatrix}$ 相似.

(1) 求 x,y；

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

22.（本题满分 11 分）

设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 服从参数为 1 的指数分布，Y 的概率分布为

$$P\{Y=-1\}=p,P\{Y=1\}=1-p(0<p<1),$$

令 $Z=XY$.

(1) 求 Z 的概率密度；

(2) p 为何值时，X 与 Z 不相关？

(3) X 与 Z 是否相互独立？

23.（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\geqslant\mu,\\ 0, & x<\mu,\end{cases}$$

其中 μ 是已知参数，$\sigma>0$ 是未知参数，A 是常数. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求 A；

(2) 求 σ^2 的最大似然估计量.

2019 年数学(一)答案解析

一、选择题

1.【答案】C

【解析】$\tan x$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开式为 $\tan x = x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^k},$$

若 $x-\tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小量，则 $k=3$.

2.【答案】B

【解析】由题意可得，$f(x)=\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 0,\\ x\ln x, & x>0,\end{cases}$ 则

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x^2}{x}=0, f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\ln x}{x}=-\infty,$$

因此 $x=0$ 是 $f(x)$ 的不可导点.

当 $x<0$ 时，$f'(x)=-2x>0$；当 $0<x<1$ 时，$f'(x)=\ln x+1<0$，

因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值.

3.【答案】D

【解析】令 $a_n=u_{n+1}^2-u_n^2$，则 $S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i=u_2^2-u_1^2+u_3^2-u_2^2+\cdots+u_{n-1}^2-u_n^2=u_{n+1}^2-u_1^2$.

由于 $\{u_n\}$ 是单调增加的有界数列，因此部分和数列 $\{S_n\}$ 非负有界且单调增加，故部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛，即级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}^2-u_n^2)$ 收敛.

4.【答案】D

【解析】由题意可得，该曲线积分与路径无关，则 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{1}{y^2}$，且 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 在上半平面内具有连续偏导数，因此可取 $P(x,y)=x-\frac{1}{y}$.

5.【答案】C

【解析】设 λ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{\alpha}$ 为其对应的非零特征向量，则

$$(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}=(\lambda^2+\lambda-2)\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0},$$

因此 $\lambda^2+\lambda-2=0$，从而解得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=-2$.

由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵且 $|\boldsymbol{A}|=4$，故 $\lambda_2=-2$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的二重根，因此二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的负惯性指数为 2，正惯性指数为 1，故其规范形为 $y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

6.【答案】A

【解析】由题意可得，$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & d_3 \end{array}\right)$，

3 个平面两两相交，则 $2 \leqslant r(A) \leqslant 3$. 并且 3 个平面无公共交点，即方程 $Ax=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$ 无解，

那么 $r(A)<r(\overline{A}) \leqslant 3$，因此 $r(A)=2$，$r(\overline{A})=3$.

7.【答案】C

【解析】$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$，$P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)$，

因此 $P(A\overline{B})=P(B\overline{A}) \Leftrightarrow P(A)=P(B)$.

8.【答案】A

【解析】由题意可得，$X-Y \sim N(0,2\sigma^2)$，则

$$P\{|X-Y|<1\}=P\{-1<X-Y<1\}=\frac{1}{2\sqrt{\pi\sigma^2}}\int_{-1}^{1} e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}} dx,$$

因此与 μ 无关，而与 σ^2 有关.

二、填空题

9.【答案】$\frac{y}{\cos x}+\frac{x}{\cos y}$

【解析】$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}+y=-f'(u)\cos x+y$，

$\frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial y}+x=f'(u)\cos y+x$，

因此
$$\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\cos y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\cos x}+\frac{x}{\cos y}.$$

10.【答案】$\sqrt{3e^x-2}$

【解析】由 $2yy'-y^2-2=0$，分离变量可得 $\frac{2y}{y^2+2}dy=dx$，

两边同时积分得 $y=\sqrt{Ce^x-2}$（C 为任意常数）.

因为 $y(0)=1$，则解得 $C=3$，因此满足条件 $y(0)=1$ 的特解为 $y=\sqrt{3e^x-2}$.

11.【答案】$\cos\sqrt{x}$

【解析】$\cos x$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开式为 $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$，

而 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(\sqrt{x})^{2n}$，则 $S(x)=\cos\sqrt{x}$.

12.【答案】$\frac{32}{3}$

【解析】由题意可得 $\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}\,dx\,dy=\iint\limits_{\Sigma}|y|\,dx\,dy$，

令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则 $\iint\limits_{\Sigma}|y|\,dx\,dy=2\int_0^{\pi}d\theta\int_0^2 r^2\sin\theta\,dr=\frac{16}{3}\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta=\frac{32}{3}$.

13.【答案】$x=c\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$（$c$ 为任意常数）

【解析】由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，且 $\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，则 $r(\boldsymbol{A})=2$，因此线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中只含一个向量.

由 $\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$ 可知，$\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个解，

因此线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=c\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$（$c$ 为任意常数）.

14.【答案】$\frac{2}{3}$

【解析】由题意可得，$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{x^2}{4}, & 0\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2,\end{cases}$ $E(X)=\int_0^2\frac{x^2}{2}dx=\frac{4}{3}$，则

$$P\{F(X)>E(X)-1\}=P\left\{\frac{X^2}{4}>\frac{1}{3}\right\}=P\left\{X>\sqrt{\frac{4}{3}}\right\}+P\left\{X<-\sqrt{\frac{4}{3}}\right\}$$

$$=P\left\{X>\sqrt{\frac{4}{3}}\right\}=\int_{\sqrt{\frac{4}{3}}}^2\frac{x}{2}dx=\frac{2}{3}.$$

三、解答题

15.【解析】(1) 微分方程为 $y'+xy=e^{-\frac{x^2}{2}}$，其通解为

$$y=e^{-\int x\,dx}\left(\int e^{-\frac{x^2}{2}}e^{\int x\,dx}dx+c\right)=(x+c)e^{-\frac{1}{2}x^2},$$

由 $y(0)=0$ 知 $c=0$，因此 $y=xe^{-\frac{1}{2}x^2}$.

(2) $y'=e^{-\frac{1}{2}x^2}-x^2e^{-\frac{1}{2}x^2}=(1-x^2)e^{-\frac{1}{2}x^2}$，

$y''=-2xe^{-\frac{1}{2}x^2}-x(1-x^2)e^{-\frac{1}{2}x^2}=(x^3-3x)e^{-\frac{1}{2}x^2}=(x+\sqrt{3})x(x-\sqrt{3})e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

故当 $x\in(-\infty,-\sqrt{3})\cup(0,\sqrt{3})$ 时，$y''<0$，为凸区间；

当 $x \in (-\sqrt{3},0) \cup (\sqrt{3},+\infty)$ 时，$y'' > 0$，为凹区间.

因此拐点为$(-\sqrt{3},-\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}})$，$(0,0)$，$(\sqrt{3},\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}})$.

16.【解析】(1) 函数梯度为$\left(\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)\Bigg|_{(x,y)=(3,4)}=(6a,8b)$，

梯度方向即方向导数最大的方向，故$\dfrac{6a}{-3}=\dfrac{8b}{-4}=k$，$k>0$，可得 $a=b(a,b<0)$，

且$\sqrt{36a^2+64b^2}=10$，故 $a=b=-1$.

(2) 由面积公式可得，

$$
\begin{aligned}
S&=\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=\iint_{x^2+y^2\leqslant 2}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&=\iint_{x^2+y^2\leqslant 2}\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{2\pi}{8}\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}(1+4r^2)\\
&=\frac{\pi}{4}\times\frac{2}{3}\times(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}}\\
&=\frac{13}{3}\pi.
\end{aligned}
$$

17.【解析】令 $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}|\sin x|\,\mathrm{d}x$，则 $I=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}(-1)^n\mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$.

令 $I_n=\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}(-1)^n\mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$，则

n 为偶数时，

$$
\begin{aligned}
I_n&=-\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\sin x\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})=-\mathrm{e}^{-x}\sin x\Big|_{n\pi}^{(n+1)\pi}+\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x\\
&=-\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\cos x\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})=-\mathrm{e}^{-x}\cos x\Big|_{n\pi}^{(n+1)\pi}-\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x\\
&=\mathrm{e}^{-n\pi}\cos n\pi-\mathrm{e}^{-(n+1)\pi}\cos(n+1)\pi-I_n\\
&=\mathrm{e}^{-n\pi}+\mathrm{e}^{-(n+1)\pi}-I_n,
\end{aligned}
$$

整理得 $I_n=\dfrac{\mathrm{e}^{-n\pi}+\mathrm{e}^{-(n+1)\pi}}{2}$，

同理可得 n 为奇数时，

$$I_n=\frac{\mathrm{e}^{-n\pi}+\mathrm{e}^{-(n+1)\pi}}{2},$$

故 $I=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}I_n=\frac{1}{2}\times\left(1+2\times\frac{\mathrm{e}^{-\pi}}{1-\mathrm{e}^{-\pi}}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\mathrm{e}^{\pi}-1}$.

18.(1)【证明】显然 $0<\dfrac{x^{n+1}\sqrt{1-x^2}}{x^n\sqrt{1-x^2}}=x<1$，对任意 $x\in(0,1)$ 都成立，

故 $0<\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<1$，即 $\{a_n\}$ 单调减少.

令 $x=\sin t$，则

$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\cos^2 t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}t\,dt.$$

令 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,dt$，则 $a_n=I_n-I_{n+2}$，$a_{n-2}=I_{n-2}-I_n$.

由于

$$\begin{aligned}I_n&=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}t\,d(\cos t)=-\sin^{n-1}t\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,d(\sin^{n-1}t)\\&=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\sin^{n-2}t\,dt=(n-1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}t\,dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,dt\right)\\&=(n-1)(I_{n-2}-I_n),\end{aligned}$$

可得 $I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$.

故 $a_n=I_n-I_{n+2}=I_n-\dfrac{n+1}{n+2}I_n=\dfrac{1}{n+2}I_n$，

$a_{n-2}=I_{n-2}-I_n=\dfrac{n}{n-1}I_n-I_n=\dfrac{1}{n-1}I_n$，

因此 $a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}\ (n=2,3,\cdots)$.

(2)【解析】由于 $a_n<a_{n-1}<a_{n-2}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_n}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n+2}=1$，

故由夹逼定理，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=1$.

19.【解析】不妨设 Ω 的形心坐标为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，令 $I=\iiint\limits_{\Omega}dx\,dy\,dz$，则

$$\bar{x}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}x\,dx\,dy\,dz}{I},\ \bar{y}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}y\,dx\,dy\,dz}{I},\ \bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}z\,dx\,dy\,dz}{I}.$$

由对称性可知 $\bar{x}=0$，

令 $D_z=\{(x,y)\mid x^2+(y-z)^2\leqslant(1-z)^2\}$，则

$$I=\int_0^1\iint\limits_{D_z}dx\,dy\,dz=\int_0^1\pi(1-z)^2dz=\frac{\pi}{3},$$

同理易得

$$\iiint\limits_{\Omega}z\,dx\,dy\,dz=\int_0^1\pi(1-z)^2z\,dz=\frac{\pi}{12},$$

$$\iiint_{\Omega} y\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_0^1\iint_{D_z} y\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_0^1\iint_{D_z}(u+z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}z=\int_0^1\pi(1-z)^2 z\mathrm{d}z=\frac{\pi}{12}.$$

则 $\bar{x}=0,\bar{y}=\dfrac{1}{4},\bar{z}=\dfrac{1}{4}$，

故形心坐标 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=\left(0,\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right)$.

20.【解析】(1) 由 $b\boldsymbol{\alpha}_1+c\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$，得 $\begin{cases}b+c+1=1,\\2b+3c+a=1,\\b+2c+3=1,\end{cases}$ 故 $a=3,b=2,c=-2$.

(2) 由于

$$|\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}|=\begin{vmatrix}1&1&1\\3&3&1\\2&3&1\end{vmatrix}=2\neq 0,$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基.

由(1) 知 $\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_3+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{\beta}$.

因此 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})\begin{pmatrix}1&1&0\\-\frac{1}{2}&0&1\\\frac{1}{2}&0&0\end{pmatrix}$，所求过渡矩阵即为 $\begin{pmatrix}1&1&0\\-\frac{1}{2}&0&1\\\frac{1}{2}&0&0\end{pmatrix}$.

21.【解析】(1) 由 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似知，$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$ 且 $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=\operatorname{tr}\boldsymbol{B}$，故

$$\begin{cases}4x-8=-2y,\\-4+x=y+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3,\\y=-2.\end{cases}$$

(2) 首先求 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征值，由

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix},$$

知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=-1,\lambda_3=-2$.

当 $\lambda_1=2$ 时，$\boldsymbol{A}$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{Y}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_2=-1$ 时，$\boldsymbol{A}$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{X}_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{Y}_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_3=-2$ 时，$\boldsymbol{A}$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{X}_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{Y}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{Q}_1=\begin{pmatrix}-1&-2&-1\\2&1&2\\0&0&4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Q}_2=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，

则有 $\boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1=\begin{pmatrix}2&&\\&-1&\\&&-2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Q}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2=\begin{pmatrix}2&&\\&-1&\\&&-2\end{pmatrix}$，那么

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\2&1&2\\0&0&4\end{pmatrix}$$

即为所求.

22.【解析】(1) 由题知 X 的分布函数

$$F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

当 $z\geqslant 0$ 时，

$$\begin{aligned}P\{Z\leqslant z\}&=P\{Y=1,X\leqslant z\}+P\{Y=-1,-X\leqslant z\}\\&=(1-p)P\{X\leqslant z\}+pP\{X\geqslant -z\}\\&=(1-p)(1-\mathrm{e}^{-z})+p;\end{aligned}$$

当 $z<0$ 时，

$$P\{Z\leqslant z\}=(1-p)P\{X\leqslant z\}+pP\{X\geqslant -z\}=p\mathrm{e}^{z},$$

故 Z 的概率密度

$$f(z)=\begin{cases}p\mathrm{e}^{z}, & z<0,\\ (1-p)\mathrm{e}^{-z}, & z\geqslant 0.\end{cases}$$

(2) 由题知 $E(Z)=E(XY)=E(X)E(Y)=1-2p$，

$E(XZ)=E(X^2Y)=E(X^2)E(Y)=[D(X)+E^2(X)]E(Y)=2(1-2p)$，

$\mathrm{Cov}(X,Z)=E(XZ)-E(X)E(Z)=1-2p$，

故当 $p=\dfrac{1}{2}$ 时，$\mathrm{Cov}(X,Z)=0$，即 X 与 Z 不相关.

(3) 设 $F(x,z)$ 为 (X,Z) 的联合分布函数，则

$$F(1,-1)=P\{X\leqslant 1,XY\leqslant -1\}=0,$$

而 $$F_X(1)=P\{X\leqslant 1\}=1-\mathrm{e}^{-1},F_Z(-1)=P\{Z\leqslant -1\}=p\mathrm{e}^{-1},$$

有 $$F(1,-1)\neq F_X(1)F_Z(-1),$$

所以 X 与 Z 不相互独立.

23.【解析】(1) $1=\int_{\mu}^{+\infty}\frac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx \xlongequal{y=x-\mu} \int_{0}^{+\infty}\frac{A}{\sigma}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy=\frac{1}{2}A\cdot\sqrt{2\pi}$，

故 $A=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

(2) 似然函数为

$$L(\sigma^2)=f(x_1;\sigma^2)\cdots f(x_n;\sigma^2)=\frac{A^n}{\sigma^n}e^{-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

则取对数得

$$\ln L(\sigma^2)=n\ln A-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2},$$

令 $\frac{d\ln L(\sigma^2)}{d\sigma^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=0$，解得 $\sigma^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$，

得 σ^2 的最大似然估计量为

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2.$$