2018 年全国硕士研究生招生考试

数 学 (三)

(科目代码:303)

一、选择题:1 ～ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

1. 下列函数中,在 $x=0$ 处不可导的是

A. $f(x)=|x|\sin|x|$.　　B. $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$.

C. $f(x)=\cos|x|$.　　D. $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$.

2. 设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上二阶可导,且$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$,则

A. 当 $f'(x)<0$ 时,$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$.　　B. 当 $f''(x)<0$ 时,$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$.

C. 当 $f'(x)>0$ 时,$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$.　　D. 当 $f''(x)>0$ 时,$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$.

3. 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$, $N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$, $K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})\mathrm{d}x$,则

A. $M>N>K$.　　B. $M>K>N$.

C. $K>M>N$.　　D. $K>N>M$.

4. 设某产品的成本函数 $C(Q)$ 可导,其中 Q 为产量,若产量为 Q_0 时平均成本最小,则

A. $C'(Q_0)=0$.　　B. $C'(Q_0)=C(Q_0)$.

C. $C'(Q_0)=Q_0C(Q_0)$.　　D. $Q_0C'(Q_0)=C(Q_0)$.

5. 下列矩阵中,与矩阵$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$相似的为

A. $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　B. $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

C. $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　D. $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

6. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，记 $r(\boldsymbol{X})$ 为矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的秩，$(\boldsymbol{X}\ \boldsymbol{Y})$ 表示分块矩阵，则

A. $r(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{AB}) = r(\boldsymbol{A})$.

B. $r(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{BA}) = r(\boldsymbol{A})$.

C. $r(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B}) = \max\{r(\boldsymbol{A}), r(\boldsymbol{B})\}$.

D. $r(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B}) = r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$.

7. 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 满足 $f(1+x) = f(1-x)$，且 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 0.6$，则 $P\{x < 0\} =$

A. 0.2.　　B. 0.3.　　C. 0.4.　　D. 0.5.

8. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n \geqslant 2)$ 为来自总体 $N(\mu, \sigma^2)(\sigma > 0)$ 的简单随机样本．令

$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}, S^* = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2}$，则

A. $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S} \sim t(n)$.

B. $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S} \sim t(n-1)$.

C. $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S^*} \sim t(n)$.

D. $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S^*} \sim t(n-1)$.

二、填空题：9 ～ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

9. 曲线 $y = x^2 + 2\ln x$ 在其拐点处的切线方程为________.

10. $\int \mathrm{e}^x \arcsin\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x =$ ________.

11. 差分方程 $\Delta^2 y_x - y_x = 5$ 的通解是________.

12. 函数 $f(x)$ 满足 $f(x+\Delta x) - f(x) = 2xf(x)\Delta x + o(\Delta x)(\Delta x \to 0)$，且 $f(0)=2$，

则 $f(1) =$ ________.

13. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性无关的向量组，若 $\boldsymbol{A\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{A\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$，

$\boldsymbol{A\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3$，则 $|\boldsymbol{A}| =$ ________.

14. 随机变量 A, B, C 相互独立，且 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$，

则 $P(AC \mid A \cup B) =$ ________.

三、解答题：15 ～ 23 小题，共 94 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本题满分 10 分)

已知实数 a, b 满足 $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[(ax+b)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - x\right] = 2$，求 a, b.

16.（本题满分 10 分）

设平面区域 D 由曲线 $y=\sqrt{3(1-x^2)}$ 与直线 $y=\sqrt{3}x$ 及 y 轴围成. 计算二重积分 $\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

17.（本题满分 10 分）

将长为 2 m 的铁丝分成三段，依次围成圆、正方形与正三角形，三个图形的面积之和是否存在最小值？若存在，求出最小值.

18.（本题满分 10 分）

已知 $\cos 2x-\dfrac{1}{(1+x)^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n(-1<x<1)$，求 a_n.

19.（本题满分 10 分）

设数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1>0, x_n\mathrm{e}^{x_{n+1}}=\mathrm{e}^{x_n}-1(n=1,2,\cdots)$，证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

20.（本题满分 11 分）

设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$，其中 a 是参数.

(1) 求 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解；

(2) $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形.

21.（本题满分 11 分）

已知 a 是常数，且矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{pmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$.

(1) 求 a；

(2) 求满足 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

22.（本题满分 11 分）

设随机变量 X 与 Y 互相独立，X 的概率分布为 $P\{X=1\}=P\{X=-1\}=\frac{1}{2}$，$Y$ 服从参数为 λ 的泊松分布. 令 $Z=XY$.

(1) 求 $\mathrm{Cov}(X,Z)$；

(2) 求 Z 的概率分布.

23.（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为 $f(x;\sigma)=\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}$，$-\infty<x<+\infty$，其中 $\sigma\in(0,+\infty)$ 为未知参数. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，记 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}$.

(1) 求 $\hat{\sigma}$；

(2) 求 $E(\hat{\sigma})$ 和 $D(\hat{\sigma})$.

2018 年数学(三)答案解析

一、选择题

1.【答案】D

【解析】$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\cos\sqrt{-x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\frac{1}{2}x}{x}=\dfrac{1}{2}$,

而 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cos\sqrt{x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-\frac{1}{2}x}{x}=-\dfrac{1}{2}\neq f'_-(0)$，因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

2.【答案】D

【解析】将函数 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{2}$ 处泰勒展开得

$$f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+f''(\xi)\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{2!}$$，其中 ξ 在 x 与 $\dfrac{1}{2}$ 之间，

则

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}f''(\xi)\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x=f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{24}f''(\xi)=0,$$

因此，当 $f''(x)>0$ 时，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$.

3.【答案】C

【解析】$M=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x^2+2x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\pi$.

令 $f(x)=\dfrac{1+x}{e^x}$，而 $f'(x)=\dfrac{-xe^x}{e^{2x}}=-\dfrac{x}{e^x}$，因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得最大值，即在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上有 $f(x)\leqslant f(0)=1$，则

$$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x<\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1\mathrm{d}x=\pi.$$

令 $g(x)=1+\sqrt{\cos x}$，则在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上有 $g(x)\geqslant 1$，则

$$K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}g(x)\mathrm{d}x>\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1\mathrm{d}x=\pi.$$

因此，$K>M>N$.

4.【答案】D

【解析】平均成本 $\overline{C}(Q)=\dfrac{C(Q)}{Q}$，若产量为 Q_0 时平均成本最小，则 $\overline{C}(Q)$ 在 $Q=Q_0$ 处取得极小值，从而 $\overline{C}'(Q_0)=\dfrac{C'(Q_0)Q_0-C(Q_0)}{Q_0^2}=0$，由此可得 $C'(Q_0)Q_0=C(Q_0)$.

5.【答案】A

【解析】令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，显然本题 5 个矩阵的特征值都为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$，现计算对应于特征值 1 的线性无关的特征向量的个数.

$r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{P})=r\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}=2$，因此对应于特征值 1 的线性无关的特征向量为 1 个.

令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，且 $r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=r\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}=2$，因此线性无关的特征向量也为 1 个，

因此，矩阵 $\boldsymbol{P}$ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似. 同理可得矩阵 $\boldsymbol{P}$ 与其他选项中的矩阵不相似.

6.【答案】A

【解析】显然，$r(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{AB})\geqslant r(\boldsymbol{A})$.

而 $r(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{AB})=r[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}\ \boldsymbol{B})]\leqslant r(\boldsymbol{A})$，因此 $r(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})$.

7.【答案】A

【解析】由题意可得，

$$\int_{-\infty}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_{2}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1-0.6=0.4,\int_{2}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{-1}f(1-t)\mathrm{d}t,$$

由 $f(1+x)=f(1-x)$ 可知，

$$\int_{-\infty}^{-1}f(1-t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{-1}f(1+t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0}f(x)\mathrm{d}x,$$

故 $\int_{-\infty}^{0}f(x)\mathrm{d}x=\int_{2}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$，因此 $P\{X<0\}=\int_{-\infty}^{0}f(x)\mathrm{d}x=0.2$.

8.【答案】B

【解析】由题知 $X_i\sim N(\mu,\sigma^2)$，$\overline{X}\sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$，从而有 $\dfrac{X_i-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$，$\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma}\sim N(0,1)$，

因为 $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立，所以 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，

则 $$\frac{\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}\Big/\sqrt{(n-1)}}=\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S}\sim t(n-1).$$

二、填空题

9.【答案】$y=4x-3$

【解析】$y'=2x+\frac{2}{x}$，$y''=2-\frac{2}{x^2}$，令 $y''=0$，解得 $x=1$，$x=-1$（舍去），

因此点(1,1) 为曲线的拐点，且 $y'|_{x=1}=4$，

则曲线在(1,1) 处的切线方程为 $y-1=4(x-1)$，即 $y=4x-3$.

10.【答案】$e^x\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}-\sqrt{1-e^{2x}}+C$（$C$ 为任意常数）

【解析】$\int e^x\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}\,dx=e^x\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}-\int e^x\cdot\frac{1}{e^x}\cdot\frac{-e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$

$$=e^x\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}-\sqrt{1-e^{2x}}+C\text{（}C\text{ 为任意常数）}.$$

11.【答案】$y_x=C\cdot 2^x-5$（C 为任意常数）

【解析】差分方程 $\Delta^2 y_x-y_x=5$ 可化为 $y_{x+2}-2y_{x+1}=5$.

齐次差分方程 $y_{x+2}-2y_{x+1}=0$ 的特征方程为 $\lambda^2-2\lambda=0$，其特征根为 $\lambda_1=0,\lambda_2=2$，

因此，齐次差分方程的通解为 $y_x=C\cdot 2^x$（C 为任意常数）.

原差分方程的特解为 $y_x=-5$

因此差分方程的通解为 $y_x=C\cdot 2^x-5$（C 为任意常数）.

12.【答案】$2e$

【解析】由题意可得，$f'(x)=2xf(x)$，分离变量可得$\frac{d[f(x)]}{f(x)}=2x\,dx$，

解得 $f(x)=Ce^{x^2}$（C 为任意常数）. 又 $f(0)=2$，解得 $C=2$，

因此 $f(x)=2e^{x^2}$，$f(1)=2e$.

13.【答案】2

【解析】令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则矩阵 $\boldsymbol{P}$ 可逆.

由题意可得，$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{PB}$，即 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，那么矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似，故 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|=2$.

14.【答案】$\frac{1}{3}$

【解析】$P(AC|A\cup B)=\frac{P[AC(A\cup B)]}{P(A\cup B)}=\frac{P(AC\cup ABC)}{P(A\cup B)}=\frac{P(AC)}{P(A)+P(B)-P(AB)}$

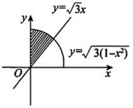
$$=\frac{P(A)P(C)}{P(A)+P(B)-P(A)P(B)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}.$$

三、解答题

15.【解析】原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(ax+b)\left(1+\frac{1}{x}\right)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(ax+a+b+\frac{b}{x}-x\right)=2$，

故 $\begin{cases}a-1=0,\\a+b=2,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a=1,\\b=1.\end{cases}$

16.【解析】积分区域如右图所示，曲线 $y=\sqrt{3(1-x^2)}$ 与直线 $y=\sqrt3 x$ 的交点为 $\left(\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt6}{2}\right)$.



16 题图

$$\iint\limits_D x^2\,dx\,dy=\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}x^2dx\int_{\sqrt3x}^{\sqrt{3(1-x^2)}}dy=\sqrt3\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}x^2\sqrt{1-x^2}\,dx-\sqrt3\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}x^3dx$$

$$=\sqrt3\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}x^2\sqrt{1-x^2}\,dx-\frac{\sqrt3}{16}\xlongequal{x=\sin t}\sqrt3\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2t\cos^2t\,dt-\frac{\sqrt3}{16}$$

$$=\frac{\sqrt3}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 2t\,d(2t)-\frac{\sqrt3}{16}=\frac{\sqrt3}{8}\times\frac12\times\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt3}{16}=\frac{\sqrt3(\pi-2)}{32}.$$

17.【解析】不妨设正方形周长为 a m，正三角形周长为 b m，圆周长为 $2-a-b$ m.

故 $S_{总}=\left(\frac{a}{4}\right)^2+\frac{\sqrt3}{36}b^2+\frac{(2-a-b)^2}{4\pi}$，则

$$\begin{cases}0=\dfrac{\partial S}{\partial a}=2\times\dfrac{a}{16}-\dfrac{2(2-a-b)}{4\pi},\\[2ex]0=\dfrac{\partial S}{\partial b}=\dfrac{\sqrt3}{36}\times 2b-\dfrac{2(2-a-b)}{4\pi}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{8}{\pi+4+3\sqrt3},\\[2ex]b=\dfrac{6\sqrt3}{\pi+4+3\sqrt3}.\end{cases}$$

$$A=\frac{\partial^2S}{\partial a^2}=\frac18+\frac{1}{2\pi},B=\frac{\partial^2S}{\partial a\partial b}=\frac{1}{2\pi},C=\frac{\partial^2S}{\partial b^2}=\frac{\sqrt3}{18}+\frac{1}{2\pi},$$

$B^2-AC<0$ 且 $A>0$，故 (a,b) 为极小值点.

因此 $S_{\min}=\frac{a^2}{16}+\frac{\sqrt3}{36}b^2+\frac{(2-a-b)^2}{4\pi}=\frac{1}{\pi+4+3\sqrt3}$.

18.【解析】将函数 $f(x)=\cos 2x$，$g(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}$ 分别在 $x=0$ 处泰勒展开，

$$f(x)=1-\frac{4x^2}{2!}+\frac{16x^4}{4!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}2^{2n}}{(2n)!},$$

$$g(x)=-1+2x-\frac{6}{2}x^2+\cdots+\frac{(n+1)!}{n!}x^n(-1)^{n+1}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)x^n,$$

故

$$
\begin{aligned}
f(x)+g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}(n+1)x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!}+(-1)^{2n+1}(2n+1)\right]x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{2n+2}(2n+2)x^{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n\cdot 2^{2n}}{(2n)!}-(2n+1)\right]x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}(2n+2)\cdot x^{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\ (-1<x<1),
\end{aligned}
$$

因此

$$
a_n=\begin{cases} n+1, & n\text{ 为奇数}, \\ \dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}}2^n}{n!}-(n+1), & n\text{ 为偶数}. \end{cases}
$$

19.【证明】由题意可得 $e^{x_{n+1}}=\dfrac{e^{x_n}-1}{x_n}$，

令 $f(x)=e^x$，由中值定理可知，存在 $c\in(0,x_n)$，使得

$$
\frac{e^{x_n}-1}{x_n-0}=f'(c)=e^c.
$$

故 $0<x^{n+1}<x^n$，即 $\{x_n\}$ 为单调减少有下界的数列，故 $\{x_n\}$ 收敛.

不妨设 $A=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，则 $Ae^A=e^A-1$，解得 $A=0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

20.【解析】(1) 若 $f(x_1,x_2,x_3)=0$，则

$$
\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0, \\ x_2+x_3=0, \\ x_1+ax_3=0, \end{cases}
$$

即 $\mathbf{0}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\1&0&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{AX}$，则 $|\boldsymbol{A}|=a-2$.

当 $a\neq 2$ 时，$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$；

当 $a=2$ 时，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\1&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{X}=k_1\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$，$k_1\neq 0$.

(2) 当 $a\neq 2$ 时，令

$$
\begin{cases} y_1=x_1-x_2+x_3, \\ y_2=x_2+x_3, \\ y_3=x_1+ax_3, \end{cases}
$$

即 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{AX}$.

则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形为 $f(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

当 $a=2$ 时，$\boldsymbol{A}$ 不可逆，则

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= (x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+2x_3)^2 \\ &= 2x_1^2+2x_2^2+6x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3 \\ &= 2\left(x_1-\frac{1}{2}x_2+\frac{3}{2}x_3\right)^2+\frac{3}{2}(x_2+x_3)^2, \end{aligned}$$

令 $\begin{cases} y_1=\sqrt{2}\left(x_1-\dfrac{1}{2}x_2+\dfrac{3}{2}x_3\right), \\ y_2=\dfrac{\sqrt{6}}{2}(x_2+x_3), \\ y_3=x_3, \end{cases}$

则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形为 $f(x_1,x_2,x_3)={y_1}^2+{y_2}^2$.

21.【解析】(1) 初等列变换不改变行列式的值，故 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$，

即 $-3a+7a-6a+2a=1-a+2-1$，解得 $a=2$.

(2) $(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{B}) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & -2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 6 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

可得

$\boldsymbol{X}_1=k_1\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}_2=k_2\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}_3=k_3\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (k_1,k_2,k_3 为任意常数)，

故 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的通解为

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} -6k_1+3 & -6k_2+4 & -6k_3+4 \\ 2k_1-1 & 2k_2-1 & 2k_3-1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix} (k_1,k_2,k_3 \text{ 为任意常数}),$$

因为 $|\boldsymbol{X}|=k_3-k_2$，所以可逆矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} -6k_1+3 & -6k_2+4 & -6k_3+4 \\ 2k_1-1 & 2k_2-1 & 2k_3-1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix} (k_1,k_2,k_3 \text{ 为任意常数}, k_2 \neq k_3).$$

22.【解析】(1) Y 服从参数为 λ 的泊松分布，故 $E(Y)=\lambda$.

由题意可得，$E(X)=0$，$E(X^2)=1$. 又由于 X 与 Y 相互独立，故

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X,Z) &= E(XZ)-E(X)\cdot E(Z)=E(X^2Y)-E(X)\cdot E(XY) \\ &= E(X^2)\cdot E(Y)-E(X)\cdot E(X)\cdot E(Y)=\lambda. \end{aligned}$$

(2) 当 $k \in \mathbf{N}^+$ 时，

$$P\{Z=k\}=\frac{1}{2}P\{Y=k\}+\frac{1}{2}P\{Y=-k\}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!};$$

当 $k=0$ 时，

$$P\{Z=0\}=P\{Y=0\}=\mathrm{e}^{-\lambda};$$

当 $-k \in \mathbf{N}^+$ 时，

$$P\{Z=k\}=\frac{1}{2}P\{Y=k\}+\frac{1}{2}P\{Y=-k\}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{-k}}{(-k)!},$$

故

$$P\{Z=k\}=\begin{cases}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, & k\in\mathbf{N}^+,\\ \mathrm{e}^{-\lambda}, & k=0,\\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{-k}}{(-k)!}, & -k\in\mathbf{N}^+.\end{cases}$$

23.【解析】(1) 似然函数

$$L(\sigma)=f(X_1;\sigma)\cdots f(X_n;\sigma)=\frac{1}{(2\sigma)^n}\mathrm{e}^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\sigma}}(-\infty<x_i<+\infty,i=1,2,\cdots,n).$$

取对数

$$\ln L(\sigma)=-n\ln 2-n\ln\sigma-\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\sigma}.$$

令 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\ln L(\sigma)=-\frac{n}{\sigma}+\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\sigma^2}=0$，

得 σ 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$.

(2) $E(|X_i|)=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{2\sigma}x\mathrm{e}^{-\frac{x}{\sigma}}\mathrm{d}x=2\times\frac{1}{2\sigma}\times\sigma^2\times 1=\sigma$，则

$$E(X_i^2)=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{2\sigma}x^2\mathrm{e}^{-\frac{x}{\sigma}}\mathrm{d}x\xlongequal{y=\frac{x}{\sigma}}\sigma^2\int_0^{+\infty}y^2\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=2\sigma^2.$$

由于 $X_i,\cdots,X_n$ 相互独立，故

$$E(\hat{\sigma})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(|X_i|)=\sigma,$$

$$D(\hat{\sigma})=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(|X_i|)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(2\sigma^2-\sigma^2)=\frac{\sigma^2}{n}.$$