2018 年全国硕士研究生招生考试

数 学 (一)

(科目代码:301)

一、选择题:1 ～ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是最符合题目要求的.

1. 下列函数中,在 $x=0$ 处不可导的是

A. $f(x)=|x|\sin|x|$.

B. $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$.

C. $f(x)=\cos|x|$.

D. $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$.

2. 过点 $(1,0,0)$,$(0,1,0)$,且与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切的平面为

A. $z=0$ 与 $x+y-z=1$.

B. $z=0$ 与 $2x+2y-z=2$.

C. $x=y$ 与 $x+y-z=1$.

D. $x=y$ 与 $2x+2y-z=2$.

3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n+3}{(2n+1)!}=$

A. $\sin 1+\cos 1$.

B. $2\sin 1+\cos 1$.

C. $2\sin 1+2\cos 1$.

D. $2\sin 1+3\cos 1$.

4. 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}dx$,$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+x}{e^x}dx$,$K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})dx$,则

A. $M>N>K$.

B. $M>K>N$.

C. $K>M>N$.

D. $K>N>M$.

5. 下列矩阵中,与矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相似的为

A. $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

B. $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

C. $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

D. $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

6. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，记 $r(\boldsymbol{X})$ 为矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的秩，$(\boldsymbol{X}\ \boldsymbol{Y})$ 表示分块矩阵，则

A. $r(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})$.

B. $r(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{BA})=r(\boldsymbol{A})$.

C. $r(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B})=\max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$.

D. $r(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$.

7. 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 满足 $f(1+x)=f(1-x)$，且 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0.6$，则 $P\{X<0\}=$

A. 0.2. B. 0.3. C. 0.4. D. 0.5.

8. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，据此样本检测假设：$H_0:\mu=\mu_0$，$H_1:\mu\neq\mu_0$，则

A. 如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下拒绝 H_0，那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必拒绝 H_0.

B. 如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下拒绝 H_0，那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必接受 H_0.

C. 如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下接受 H_0，那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必拒绝 H_0.

D. 如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下接受 H_0，那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必接受 H_0.

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

9. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=\mathrm{e}$，则 $k=$ ________.

10. 设函数 $f(x)$ 具有 2 阶连续导数，若曲线 $y=f(x)$ 过点 $(0,0)$ 且与曲线 $y=2^x$ 在点 $(1,2)$ 处相切，则 $\int_0^1 xf''(x)\mathrm{d}x=$ ________.

11. 设 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=xy\boldsymbol{i}-yz\boldsymbol{j}+zx\boldsymbol{k}$，则 $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{F}(1,1,0)=$ ________.

12. 设 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，则 $\oint_L xy\mathrm{d}s=$ ________.

13. 设 2 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有两个不同特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关的特征向量，且满足 $\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，则 $|\boldsymbol{A}|=$ ________.

14. 设随机事件 A 与 B 相互独立，A 与 C 相互独立，$BC=\varnothing$. 若 $P(A)=P(B)=\dfrac{1}{2}$，$P(AC\mid AB\cup C)=\dfrac{1}{4}$，则 $P(C)=$ ________.

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本题满分 10 分）

求不定积分 $\int \mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$.

16.(本题满分 10 分)

将长为 2 m 的铁丝分成三段,依次围成圆、正方形与正三角形.三个图形的面积之和是否存在最小值?若存在,求出最小值.

17.(本题满分 10 分)

设 Σ 是曲面 $x=\sqrt{1-3y^2-3z^2}$ 的前侧,计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma} x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

18.(本题满分 10 分)

已知微分方程 $y'+y=f(x)$,其中 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的连续函数.

(1) 若 $f(x)=x$,求方程的通解;

(2) 若 $f(x)$ 是周期为 T 的函数,证明:方程存在唯一的以 T 为周期的解.

19.(本题满分 10 分)

设数列 $\{x_n\}$ 满足:$x_1>0$,$x_n\mathrm{e}^{x_{n+1}}=\mathrm{e}^{x_n}-1(n=1,2,\cdots)$.证明 $\{x_n\}$ 收敛,并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

20.(本题满分 11 分)

设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$,其中 a 是参数.

(1) 求 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解;

(2) 求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形.

21.（本题满分 11 分）

已知 a 是常数，且矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & a\\ 1 & 3 & 0\\ 2 & 7 & -a\end{pmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & a & 2\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

(1) 求 a；

(2) 求满足 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

22.（本题满分 11 分）

设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 的概率分布为 $P\{X=1\}=P\{X=-1\}=\dfrac{1}{2}$，$Y$ 服从参数为 λ 的泊松分布，令 $Z=XY$.

(1) 求 $\mathrm{Cov}(X,Z)$；

(2) 求 Z 的概率分布.

23.（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\sigma)=\frac{1}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}},\ -\infty<x<+\infty,$$

其中 $\sigma\in(0,+\infty)$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，记 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}$.

(1) 求 $\hat{\sigma}$；

(2) 求 $E(\hat{\sigma})$ 和 $D(\hat{\sigma})$.

2018 年数学(一)答案解析

一、选择题

1.【答案】D

【解析】D 选项：$f(x)=\cos\sqrt{|x|}$，有 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\cos\sqrt{-x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-\frac{1}{2}(-x)}{x}=\dfrac{1}{2}$，

而 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\cos\sqrt{x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-\frac{1}{2}x}{x}=-\dfrac{1}{2}\neq f'_-(0)$，因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

2.【答案】B

【解析】经计算，曲面的法向量 $\boldsymbol{n}=\{2x,2y,-1\}$，

设切点为 $P(x_0,y_0,z_0)$，则法向量 $\boldsymbol{n}=\{2x_0,2y_0,-1\}$，过点 P 的切平面方程为

$$2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)-(z-z_0)=0,$$

将 $(1,0,0)$ 和 $(0,1,0)$ 代入可得

$$\begin{cases}2x_0(1-x_0)+2y_0(0-y_0)-(0-z_0)=0,\\2x_0(0-x_0)+2y_0(1-y_0)-(0-z_0)=0,\end{cases}$$

又 $x_0^2+y_0^2=z_0$，解得 $\begin{cases}x_0=0,\\y_0=0,\\z_0=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_0=1,\\y_0=1,\\z_0=2,\end{cases}$

所以切平面方程为 $z=0$ 和 $2x+2y-z=2$. 故选 B.

3.【答案】B

【解析】$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n+3}{(2n+1)!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{(2n)!}+2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{(2n+1)!}.$

$\cos x$ 的麦克劳林展开式为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$，故 $\cos 1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{(2n)!}$；

$\sin x$ 的麦克劳林展开式为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$，故 $\sin 1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{(2n+1)!}$，

因此 $$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{(2n+1)!}=\cos 1+2\sin 1.$$

4.【答案】C

【解析】$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+x^2+2x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\pi.$

令 $f(x)=\dfrac{1+x}{e^x}$，而 $f'(x)=\dfrac{-x}{e^x}$，因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得最大值，即在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上

有 $f(x)\leqslant f(0)=1$，则 $N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x<\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\mathrm{d}x=\pi$.

令 $g(x)=1+\sqrt{\cos x}$，则在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上有 $g(x)\geqslant 1$，则

$$K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(x)\mathrm{d}x>\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\mathrm{d}x=\pi.$$

因此，$K>M>N$.

5.【答案】A

【解析】令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，显然矩阵 $\boldsymbol{P}$ 与四个选项中矩阵的特征值都为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$，现计算对应于特征值 1 的线性无关的特征向量的个数：$r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{P})=r\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}=2$，因此矩阵 $\boldsymbol{P}$ 对应于特征值 1 的线性无关的特征向量为 1 个.

令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=r\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}=2$，因此线性无关的特征向量为 1 个，

因此，矩阵 $\boldsymbol{P}$ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似，同理可得矩阵 $\boldsymbol{P}$ 与其他选项中的矩阵不相似.

6.【答案】A

【解析】显然，$r(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{AB})\geqslant r(\boldsymbol{A})$.

而 $r(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{AB})=r\,[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}\ \boldsymbol{B})]\leqslant r(\boldsymbol{A})$，因此 $r(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})$.

7.【答案】A

【解析】由题意可得 $\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{2}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=1-0.6=0.4$，而

$$\int_{2}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=1-t} \int_{-\infty}^{-1} f(1-t)\mathrm{d}t,$$

由 $f(1+x)=f(1-x)$ 可知，

$$\int_{-\infty}^{-1} f(1-t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{-1} f(1+t)\mathrm{d}t \xlongequal{x=1+t} \int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x,$$

故 $\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x=\int_{2}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，

因此 $P\{X<0\}=\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x=0.2$.

8.【答案】D

【解析】检验水平变小，则假设 H_0 的接受域变大. 因此，若在检验水平 $\alpha=0.05$ 下接受 H_0，则在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必接受 H_0.

二、填空题

9.【答案】-2

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{2\tan x}{1+\tan x}\right)^{-\frac{1+\tan x}{2\tan x}\cdot\left(-\frac{2\tan x}{1+\tan x}\right)\cdot\frac{1}{\sin kx}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\left(-\frac{2\tan x}{1+\tan x}\right)\cdot\frac{1}{\sin kx}}$,

若原式 $=\mathrm{e}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{2\tan x}{1+\tan x}\right)\cdot\dfrac{1}{\sin kx}=1$，因此 $k=-2$.

10.【答案】$2\ln 2-2$

【解析】$f(x)$ 过点 $(0,0)$，则 $f(0)=0$.

$y=f(x)$ 在点 $(1,2)$ 处与 $y=2^x$ 相切，则 $f(1)=2, f'(1)=2\ln 2$.

故 $\int_0^1 xf''(x)\mathrm{d}x=xf'(x)\big|_0^1-\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x=f'(1)-[f(1)-f(0)]=2\ln 2-2$.

11.【答案】$\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$

【解析】$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{F}(1,1,0)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ xy & -yz & zx\end{vmatrix}_{(1,1,0)}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$.

12.【答案】$-\dfrac{\pi}{3}$

【解析】由积分曲线(为经过原点的单位圆)的对称性可知 $\oint_L xy\mathrm{d}s=\oint_L yz\mathrm{d}s=\oint_L xz\mathrm{d}s$，

因此 $\oint_L xy\mathrm{d}s=\dfrac{1}{3}\oint_L(xy+yz+xz)\mathrm{d}s=\dfrac{1}{6}\oint_L[(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)]\mathrm{d}s$

$$=-\frac{1}{6}\oint_L \mathrm{d}s=-\frac{\pi}{3}.$$

13.【答案】-1

【解析】设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 的特征值分别为 λ_1,λ_2，且 $\lambda_1\neq\lambda_2$.

由 $\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，可得 $(\lambda_1^2-1)\boldsymbol{\alpha}_1+(\lambda_2^2-1)\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}$.

而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为两个线性无关的向量，故 $\lambda_1^2-1=0,\lambda_2^2-1=0$，解得 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1$，

故 $|\boldsymbol{A}|=-1$.

14.【答案】$\dfrac{1}{4}$

【解析】由题意可得 $P(AC|AB\cup C)=\dfrac{P[AC\cap(AB\cup C)]}{P(AB\cup C)}=\dfrac{P[A(B\cap C)\cup AC]}{P(AB)+P(C)}$

$$=\frac{P(A)P(C)}{P(A)P(B)+P(C)}=\frac{1}{4},$$

解得 $P(C)=\dfrac{1}{4}$.

三、解答题

15.【解析】原式 $=\frac{1}{2}\int \arctan\sqrt{e^x-1}\,d(e^{2x})$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{2}\int e^{2x}\,d(\arctan\sqrt{e^x-1})+C_1$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{2}\int e^{2x}\frac{1}{e^x-1+1}\cdot\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}dx+C_1$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}dx+C_1,$$

令 $I=\frac{1}{4}\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}dx$,

则 $I\xlongequal{e^x=t}\frac{1}{4}\int\frac{t^2}{\sqrt{t-1}}d(\ln t)=\frac{1}{4}\int\frac{t}{\sqrt{t-1}}dt=\int\frac{1}{2}t\,d(\sqrt{t-1})$

$$\xlongequal{y=\sqrt{t-1}}\frac{1}{2}\int(y^2+1)dy=\frac{1}{6}y^3+\frac{y}{2}+C_2$$

$$=\frac{1}{6}(e^x-1)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}(e^x-1)^{\frac{1}{2}}+C_2.$$

故原式 $=\frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{6}(e^x+2)\sqrt{e^x-1}+C$（$C$ 为任意常数）.

16.【解析】不妨设正方形周长为 a，正三角形周长为 b，圆周长为 $2-a-b$.

故 $S_{总}=\left(\frac{a}{4}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{36}b^2+\frac{(2-a-b)^2}{4\pi}$，则

$$\begin{cases}0=\frac{\partial S}{\partial a}=2\times\frac{a}{16}-\frac{2(2-a-b)}{4\pi},\\ 0=\frac{\partial S}{\partial b}=\frac{\sqrt{3}}{36}\times 2b-\frac{2(2-a-b)}{4\pi}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{8}{\pi+4+3\sqrt{3}},\\ b=\frac{6\sqrt{3}}{\pi+4+3\sqrt{3}}.\end{cases}$$

$$A=\frac{\partial^2 S}{\partial a^2}=\frac{1}{8}+\frac{1}{2\pi},B=\frac{\partial^2 S}{\partial a\partial b}=\frac{1}{2\pi},C=\frac{\partial^2 S}{\partial b^2}=\frac{\sqrt{3}}{18}+\frac{1}{2\pi},$$

$B^2-AC<0$ 且 $A>0$，故 (a,b) 为极小值点.

因此 $S_{\min}=\frac{a^2}{16}+\frac{\sqrt{3}}{36}b^2+\frac{(2-a-b)^2}{4\pi}=\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}$.

17.【解析】$\Sigma: x^2+3y^2+3z^2=1, x\geqslant 0$. 令 $D=\left\{(y,z)\,\middle|\,y^2+z^2\leqslant\frac{1}{3},x=0\right\}$，$\Omega$ 表示由曲面 Σ 和 D 包围的区域，由高斯公式可知

$$I=\iiint_\Omega(1+3y^2+3z^2)dx\,dy\,dz-\iint_D x\,dy\,dz+(y^3+2)dz\,dx+z^3dx\,dy$$

$$=\iiint_\Omega(1+3y^2+3z^2)dx\,dy\,dz.$$

令$\begin{cases} y = r\cos\theta, \\ z = r\sin\theta, \end{cases}$

则 $I = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{1-3r^2}} (1+3r^2) r \mathrm{d}x \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r = 2\pi \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} r(1+3r^2)\sqrt{1-3r^2}\, \mathrm{d}r = \frac{14\pi}{45}$.

18.(1)【解析】若 $f(x)=x$，则微分方程为 $y'+y=x$，即$(\mathrm{e}^x y)'=x\mathrm{e}^x$，

故通解为

$$y=\mathrm{e}^{-x}\int t\mathrm{e}^t \mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-x}(x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+c)=x-1+c\mathrm{e}^{-x}\ (c \text{ 为任意常数}).$$

(2)【证明】方程 $y'+y=f(x)$ 的通解为

$$y=\mathrm{e}^{-x}\left[\int_0^x f(t)\mathrm{e}^t \mathrm{d}t+c\right]\ (c \text{ 为任意常数}).$$

从而

$$y(x+T)-y(x)=\mathrm{e}^{-x}\left[(\mathrm{e}^{-T}-1)c+\mathrm{e}^{-T}\int_0^{x+T}\mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t\right],$$

又 $f(x)$ 是周期为 T 的函数，则

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-T}\int_0^{x+T}\mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t &= \mathrm{e}^{-T}\int_0^T \mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-T}\int_T^{x+T}\mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{e}^{-T}\int_0^T \mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-T}\int_0^x \mathrm{e}^{u+T} f(u+T)\mathrm{d}u \\ &= \mathrm{e}^{-T}\int_0^T \mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x \mathrm{e}^u f(u)\mathrm{d}u, \end{aligned}$$

所以

$$y(x+T)-y(x)=\mathrm{e}^{-x}\left[(\mathrm{e}^{-T}-1)c+\mathrm{e}^{-T}\int_0^T \mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t\right],$$

令 $y(x+T)-y(x)=0$，则 $c=\dfrac{1}{\mathrm{e}^T-1}\displaystyle\int_0^T \mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t$，所以方程存在唯一的以 T 为周期的解.

19.【解析】由题 $\mathrm{e}^{x_{n+1}}=\dfrac{\mathrm{e}^{x_n}-1}{x_n}$，

令 $f(x)=\mathrm{e}^x$，由中值定理可知，存在 $c\in(0,x_n)$，使得

$$\frac{\mathrm{e}^{x_n}-1}{x_n-0}=f'(c)=\mathrm{e}^c.$$

故 $0<x_{n+1}<x_n$，即$\{x_n\}$为单调减少有下界的数列，故$\{x_n\}$收敛.

不妨设 $A=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，则 $A\mathrm{e}^A=\mathrm{e}^A-1$，解得 $A=0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

20.【解析】(1) 若 $f(x_1,x_2,x_3)=0$，则有

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0, \\ x_2+x_3=0, \\ x_1+ax_3=0, \end{cases}$$

即
$$\mathbf{0}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{AX},$$

则 $|\boldsymbol{A}|=a-2$，

当 $a\neq 2$ 时，$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$；

当 $a=2$ 时，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{X}=k_1\begin{pmatrix}-2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$ $(k_1\neq 0)$.

(2) 当 $a\neq 2$ 时，令
$$\begin{cases}y_1=x_1-x_2+x_3,\\ y_2=x_2+x_3,\\ y_3=x_1+ax_3,\end{cases}$$

即
$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{AX},$$

则 $f(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

当 $a=2$ 时，$\boldsymbol{A}$ 不可逆.

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+2x_3)^2\\ &=2x_1^2+2x_2^2+6x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3\\ &=2\left(x_1-\frac{1}{2}x_2+\frac{3}{2}x_3\right)^2+\frac{3}{2}(x_2+x_3)^2,\end{aligned}$$

令
$$\begin{cases}y_1=\sqrt{2}\left(x_1-\dfrac{1}{2}x_2+\dfrac{3}{2}x_3\right),\\ y_2=\dfrac{\sqrt{6}}{2}(x_2+x_3),\\ y_3=x_3,\end{cases}$$

所以 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形为 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+y_2^2$.

21.【解析】(1) 初等列变换不改变行列式的值，故 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$.

即 $-3a+7a-6a+2a=1-a+2-1$，解得 $a=2$.

(2) $(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2\\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 7 & -2 & -1 & 1 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 6 & 3 & 4 & 4\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$.

可得

$$X_1 = k_1\begin{pmatrix}-6\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix},X_2 = k_2\begin{pmatrix}-6\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix},X_3 = k_3\begin{pmatrix}-6\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}(k_1,k_2,k_3\text{ 为任意常数}).$$

故 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的通解为

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}-6k_1+3 & -6k_2+4 & -6k_3+4\\ 2k_1-1 & 2k_2-1 & 2k_3-1\\ k_1 & k_2 & k_3\end{pmatrix}(k_1,k_2,k_3\text{ 为任意常数}),$$

因为 $|\boldsymbol{X}|=k_3-k_2$，

所以可逆矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-6k_1+3 & -6k_2+4 & -6k_3+4\\ 2k_1-1 & 2k_2-1 & 2k_3-1\\ k_1 & k_2 & k_3\end{pmatrix}(k_1,k_2,k_3\text{ 为任意常数},k_2\neq k_3).$

22.【解析】(1)Y 服从参数为 λ 的泊松分布，故 $E(Y)=\lambda$.

由题意可知，$E(X)=0,E(X^2)=1\times\frac{1}{2}\times 2=1$. 又由于 X 与 Y 相互独立，故

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Z)&=E(XZ)-E(X)E(Z)\\&=E(X^2Y)-E(X)E(XY)\\&=E(X^2)E(Y)-E(X)E(X)E(Y)\\&=\lambda.\end{aligned}$$

(2) 当 $k\in\mathbf{N}^+$ 时，

$$P\{Z=k\}=\frac{1}{2}P\{Y=k\}+\frac{1}{2}P\{Y=-k\}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!};$$

当 $k=0$ 时，

$$P\{Z=0\}=P\{Y=0\}=\mathrm{e}^{-\lambda};$$

当 $-k\in\mathbf{N}^-$ 时，

$$P\{Z=k\}=\frac{1}{2}P\{Y=k\}+\frac{1}{2}P\{Y=-k\}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{-k}}{(-k)!},$$

故 $P\{Z=k\}=\begin{cases}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, & k\in\mathbf{N}^+,\\ \mathrm{e}^{-\lambda}, & k=0,\\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{-k}}{(-k)!}, & -k\in\mathbf{N}^+.\end{cases}$

23.【解析】(1) 似然函数

$$L(\sigma)=f(x_1;\sigma)\cdots f(x_n;\sigma)=\frac{1}{(2\sigma)^n}\mathrm{e}^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\sigma}},$$

取对数
$$\ln L(\sigma)=-n\ln 2-n\ln\sigma-\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\sigma}.$$

令
$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma}=-\frac{n}{\sigma}+\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\sigma^2}=0,$$

解得 $\sigma=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$，故 σ 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$.

(2) $E(|X_i|)=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{2\sigma}x\mathrm{e}^{-\frac{x}{\sigma}}\mathrm{d}x=2\times\frac{1}{2\sigma}\times\sigma^2\times1=\sigma$,

$E(X_i^2)=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{2\sigma}x^2\mathrm{e}^{-\frac{x}{\sigma}}\mathrm{d}x\xlongequal{y=\frac{x}{\sigma}}\sigma^2\int_0^{+\infty}y^2\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=2\sigma^2$.

由于 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立，故
$$E(\hat{\sigma})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E|X_i|=\sigma,$$
$$D(\hat{\sigma})=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D|X_i|=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(2\sigma^2-\sigma^2)=\frac{\sigma^2}{n}.$$