2017 年全国硕士研究生招生考试

数 学 （二）

（科目代码：302）

一、选择题：1 ～ 8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

1. 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0,\\ b, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则

A. $ab=\frac{1}{2}$. B. $ab=-\frac{1}{2}$. C. $ab=0$. D. $ab=2$.

2. 设二阶可导函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=f(-1)=1, f(0)=-1$，且 $f''(x)>0$，则

A. $\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x>0$. B. $\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x<0$.

C. $\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x>\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x$. D. $\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x<\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x$.

3. 设数列 $\{x_n\}$ 收敛，则

A. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

B. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sqrt{|x_n|})=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

C. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+x_n^2)=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

D. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sin x_n)=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

4. 微分方程 $y''-4y'+8y=\mathrm{e}^{2x}(1+\cos 2x)$ 的特解可设为 $y^*=$

A. $A\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$.

B. $Ax\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$.

C. $A\mathrm{e}^{2x}+x\mathrm{e}^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$.

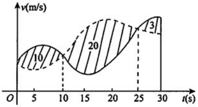
D. $Ax\mathrm{e}^{2x}+x\mathrm{e}^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$.

5. 设 $f(x,y)$ 具有一阶偏导数，且对任意的 (x,y) 都有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0, \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$，则

A. $f(0,0)>f(1,1)$. B. $f(0,0)<f(1,1)$.

C. $f(0,1)>f(1,0)$. D. $f(0,1)<f(1,0)$.

6. 甲、乙两人赛跑，计时开始时，甲在乙前方 10(单位：m)处. 图中，实线表示甲的速度曲线 $v=v_1(t)$(单位：m/s)，虚线表示乙的速度 $v=v_2(t)$，三块阴影部分面积的数值依次为 10,20,3. 计时开始后乙追上甲的时刻记为 t_0(单位：s)，则



6 题图

A. $t_0=10$.　　　　B. $15<t_0<20$.

C. $t_0=25$.　　　　D. $t_0>25$.

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 为可逆矩阵，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，

则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=$

A. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$.　　　　B. $\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$.

C. $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.　　　　D. $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

8. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则

A. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似.

B. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似.

C. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似.

D. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似.

二、填空题：9 ～ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

9. 曲线 $y=x\left(1+\arcsin\dfrac{2}{x}\right)$ 的斜渐近线方程为________.

10. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t+e^t,\\y=\sin t\end{cases}$ 确定，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=$________.

11. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}dx=$________.

12. 设函数 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，且 $df(x,y)=ye^y dx+x(1+y)e^y dy$，$f(0,0)=0$，则 $f(x,y)=$________.

13. $\displaystyle\int_0^1 dy\int_y^1\frac{\tan x}{x}dx=$________.

14. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&1&-2\\1&2&a\\3&1&-1\end{pmatrix}$ 的一个特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，则 $a=$________.

三、解答题:15 ～ 23 小题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x\sqrt{x-t}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{x^3}}$.

16.(本题满分 10 分)

设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数,$y=f(\mathrm{e}^x,\cos x)$,求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$,$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$.

17.(本题满分 10 分)

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$.

18.(本题满分 10 分)

已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 确定,求 $y(x)$ 的极值.

19.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在区间[0,1]上具有二阶导数,且 $f(1)>0$,$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$.证明:

(1) 方程 $f(x)=0$ 在区间(0,1)内至少存在一个实根;

(2) 方程 $f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$ 在区间(0,1)内至少存在两个不同实根.

20.（本题满分 11 分）

已知平面区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2y\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D (x+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

21.（本题满分 11 分）

设 $y(x)$ 是区间 $\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$ 内的可导函数，且 $y(1)=0$，点 P 是曲线 $L:y=y(x)$ 上的任意一点，L 在点 P 处的切线与 y 轴相交于点 $(0,Y_P)$，法线与 x 轴相交于点 $(X_P,0)$，若 $X_P=Y_P$，求 L 上点的坐标 (x,y) 满足的方程.

22.（本题满分 11 分）

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 有 3 个不同的特征值，且 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

(1) 证明：$r(\boldsymbol{A})=2$；

(2) 设 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，求方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

23.（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$ 在正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$ 下的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$，求 a 的值及一个正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

2017 年数学(二)答案解析

一、选择题

1.【答案】A

【解析】$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{2}x}{ax}=\dfrac{1}{2a}$，

若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $\dfrac{1}{2a}=b$，即 $ab=\dfrac{1}{2}$.

2.【答案】B

【解析】令 $g(x)=\begin{cases}2x-1, & 0\leqslant x\leqslant1,\\ -2x-1, & -1\leqslant x<0,\end{cases}$

由 $f''(x)>0$ 可知 $f(x)$ 为凹函数，则在区间 $(-1,1)$ 上恒有 $f(x)\leqslant g(x)$，

从而有 $\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x<\int_{-1}^{1}g(x)\mathrm{d}x$ 成立.

而 $\int_{-1}^{1}g(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}g(x)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{0}g(x)\mathrm{d}x=0$，因此 $\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x<0$.

3.【答案】D

【解析】数列 $\{x_n\}$ 收敛，故可设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$（$c$ 为任意常数），

当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sin x_n)=c+\sin c=0$ 时，从而有 $c=0$.

4.【答案】C

【解析】齐次线性微分方程 $y''-4y'+8y=0$ 的特征方程为 $\lambda^2-4\lambda+8=0$，

解得特征根为 $\lambda_1=2+2\mathrm{i}$，$\lambda_2=2-2\mathrm{i}$，

方程 $y''-4y'+8y=\mathrm{e}^{2x}$ 的特解形式为 $y=A\mathrm{e}^{2x}$；

方程 $y''-4y'+8y=\mathrm{e}^{2x}\cos 2x$ 的特解形式为

$$y=x\mathrm{e}^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)\text{（}B,C\text{ 为任意常数）}.$$

因此，方程 $y''-4y'+8y=\mathrm{e}^{2x}(1+\cos 2x)$ 的特解可设为

$$y=A\mathrm{e}^{2x}+x\mathrm{e}^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)\text{（}B,C\text{ 为任意常数）}.$$

5.【答案】D

【解析】对任意固定的 y，由 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$，可得 $f(0,y)<f(1,y)$；

对任意固定的 x，由 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$，可得 $f(x,1)<f(x,0)$.

因此 $f(0,1)<f(0,0)<f(1,0)$.

6.【答案】C

【解析】由图可知，在 $t=10$ s 时，甲比乙领先 20 m；

在 10 s ～ 25 s 内，乙比甲多跑了 20 m，因此乙追上甲的时刻为 $t_0=25$.

7.【答案】B

【解析】$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，

由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，可得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，

因此 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$.

8.【答案】B

【解析】矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 的特征值均为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=1$，但特征值 2 对应的特征向量个数不全相同.

$r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=r\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=1$，则特征值 2 对应 2 个线性无关的特征向量，同理可知，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 属于特征值 2 的线性无关的特征向量为 1 个，矩阵 $\boldsymbol{C}$ 属于特征值 2 的线性无关的特征向量为 2 个，因此 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似.

二、填空题

9.【答案】$y=x+2$

【解析】$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\arcsin\dfrac{2}{x}\right)=1$，

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}x\arcsin\frac{2}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\arcsin\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}}=2,$$

因此曲线的斜渐近线方程为 $y=x+2$.

10.【答案】$-\dfrac{1}{8}$

【解析】$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\dfrac{\cos t}{1+\mathrm{e}^t}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)}{\mathrm{d}t}}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=-\dfrac{(1+\mathrm{e}^t)\sin t+\mathrm{e}^t\cos t}{(1+\mathrm{e}^t)^3}$，

将 $t=0$ 代入其中，得 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=-\dfrac{1}{8}$.

11.【答案】1

【解析】$\left[\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}\right]'=\dfrac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}$,

因此$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x-\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\left[\frac{\ln(1+x)}{1+x}\right]=1.$

12.【答案】xye^y

【解析】由题意可得 $f(x,y)=xye^y+C$(C 为任意常数).

由 $f(0,0)=0$ 可得 $C=0$,因此 $f(x,y)=xye^y$.

13.【答案】$-\ln\cos 1$

【解析】将 Y 型积分转化为 X 型积分,积分区域变为 $D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x\}$,

$$\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\frac{\tan x}{x}\mathrm{d}y=\int_0^1\tan x\,\mathrm{d}x=-\ln\cos x\,|_0^1=-\ln\cos 1.$$

14.【答案】-1

【解析】由题意可得,存在 λ 使得$\begin{pmatrix}4&1&-2\\1&2&a\\3&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$,即$\begin{pmatrix}1\\3+2a\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\\\lambda\\2\lambda\end{pmatrix}$,

解得 $a=-1$.

三、解答题

15.【解析】令 $y=x-t$,由洛必达法则知

$$\text{原式}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\sqrt{y}\,e^{x-y}\mathrm{d}y}{\sqrt{x^3}}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^x\int_0^x\sqrt{y}\,e^{-y}\mathrm{d}y}{\sqrt{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\sqrt{y}\,e^{-y}\mathrm{d}y}{\sqrt{x^3}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}\,e^{-x}}{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}}=\frac{2}{3}.$$

16.【解析】令 $u(x)=e^x,v(x)=\cos x$,则

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=(f_uu_x+f_vv_x)\Big|_{x=0}=(e^x\cdot f_u-\sin x\cdot f_v)\Big|_{x=0}=f_u(1,1),$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=\left[e^x\cdot f_u+e^x(f_{uu}u_x+f_{uv}v_x)-\cos x\cdot f_v-\sin x(f_{vu}u_x+f_{vv}v_x)\right]\Big|_{x=0}$$

$$=(e^x\cdot f_u+e^{2x}\cdot f_{uu}-e^x\cdot\sin x\cdot f_{uv}-\cos x\cdot f_v-e^x\cdot\sin x\cdot f_{vu}+\sin^2x\cdot f_{vv})\Big|_{x=0}$$

$$=f_u(1,1)+f_{uu}(1,1)-f_v(1,1).$$

17.【解析】$\displaystyle\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1x\ln(1+x)\mathrm{d}x=\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2\right)$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)\,|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1x^2\,\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x(x+1)-(x+1)+1}{1+x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2-x+\ln|x+1|\right)\Big|_0^1=\frac{1}{4}.$$

18.【解析】方程两边同时对 x 求导,得

$$3x^2+3y^2y'-3+3y'=0,$$

故 $$y'(y^2+1)=1-x^2,$$

令 $y'=0$,解得 $x=\pm 1$,

且当 $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ 时,$y'<0$;当 $x\in(-1,1)$ 时,$y'>0$;

因此 $x=1$ 为极大值点,$x=-1$ 为极小值点,

将 $x=1$ 和 $x=-1$ 代入原方程,则有 $y(1)=1,y(-1)=0$,

故极大值为 1,极小值为 0.

19.【证明】(1) 由 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$ 与极限保号性,可知存在 $c\in(0,1)$,使得 $f(c)<0$.

又因为 $f(1)>0$,故由零点定理知存在 $\eta\in(c,1)\subset(0,1)$,使得 $f(\eta)=0$,

故 $f(x)=0$ 在区间(0,1)上至少有一个实根.

(2) 即讨论方程$[f(x)\cdot f'(x)]'=0$ 的实根个数.令

$$g(x)=f(x)\cdot f'(x),$$

由(1)可知,$f(x)$ 在(0,1)上至少有一个实根,不妨设为 a,即

$$f(a)=0,$$

故 $$g(a)=0,$$

另外,由 $f(0)=f(a)=0$ 可知,存在 $\xi\in(0,a)$ 使得 $f'(\xi)=0$,

因此有 $g(0)=g(\xi)=g(a)=0$,由罗尔定理知 $g'(x)=0$ 在 $(0,\xi)$ 和 (ξ,a) 内各存在一个实根,因此原方程在(0,1)上至少有两个实根.

20.【解析】令 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$ 则 $D=\{(r,\theta)\mid 0\leqslant r\leqslant 2\sin\theta,0\leqslant\theta\leqslant\pi\}$,

$$\text{故原式}=\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta}(r\cos\theta+1)^2r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta}(r^2\cos^2\theta+1+2r\cos\theta)r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\left(4\sin^4\theta\cos^2\theta+2\sin^2\theta+\frac{16}{3}\sin^3\theta\cos\theta\right)d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}4\sin^4\theta(1-\sin^2\theta)d\theta+\pi+0$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\,d\theta-8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\theta\,d\theta+\pi$$

$$=8\times\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\right)+\pi=\frac{5}{4}\pi.$$

21.【解析】不妨设 $P(a,y(a))$，故过点 P 的切线方程为

$$y-y(a)=y'(a)(x-a),$$

故 $Y_P=y(a)-ay'(a)$.

过点 P 的法线方程为

$$y-y(a)=-\frac{1}{y'(a)}(x-a),$$

故 $X_P=a+y(a)y'(a)$.

由 $X_P=Y_P$ 可知

$$y(a)-ay'(a)=a+y(a)y'(a).$$

故当 $0<x<\frac{3}{2}$ 时，有

$$y-xy'=x+yy'\Rightarrow y-x=(x+y)y'\Rightarrow y'=\frac{y-x}{y+x}=\frac{\frac{y}{x}-1}{\frac{y}{x}+1}.$$

令 $\frac{y}{x}=u$，则 $\frac{du}{dx}=\frac{y'x-y}{x^2}=\frac{-(u^2+1)}{(u+1)x}$

$$\Rightarrow \frac{d(u^2+1)}{2(u^2+1)}+\frac{du}{u^2+1}=-d(\ln x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}d[\ln(u^2+1)]+d(\arctan u)=-d(\ln x),$$

两边积分得 $$\frac{1}{2}\ln(u^2+1)+\arctan u+\ln x+c=0,$$

即 $$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right)+\arctan\frac{y}{x}+\ln x+c=0,$$

由 $y(1)=0$ 知 $c=0$.

故曲线 L 上点的坐标 (x,y) 满足的方程为

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right)+\arctan\frac{y}{x}+\ln x=0.$$

22.【解析】(1) 由于 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出，故 $r(\boldsymbol{A})<3$，且必有零特征值. 又由于 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个不同的特征值，不妨设为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，若 $\lambda_1=0$，则 $\lambda_2\neq 0,\lambda_3\neq 0$，因此 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$，

综上可知 $r(\boldsymbol{A})=2$.

(2) 求 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 即求解方程

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

显然 $\boldsymbol{X}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 为一个特解，现求解方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$，即

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0},$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，故

$$(x_1+x_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(x_2+2x_3)\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}.$$

即 $\begin{cases}x_1+x_3=0,\\x_2+2x_3=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=-x_3,\\x_2=-2x_3,\end{cases}$

故 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}\text{（}k\text{ 为任意常数）}.$$

23.【解析】令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&-4\\1&-1&1\\-4&1&a\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,x_3)$，故 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$.

由于 f 的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$，故 $|\boldsymbol{A}|=0$，因此 $a=2$.

由 $0=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&4\\-1&\lambda+1&-1\\4&-1&\lambda-2\end{vmatrix}$ 可知，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-3,\lambda_2=6,\lambda_3=0$.

由 $(-3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 可知对应的特征向量为 $\boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，

由 $(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 可知对应的特征向量为 $\boldsymbol{X}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，

由 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 可知对应的特征向量为 $\boldsymbol{X}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3$ 两两正交.

单位化，得

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},$$

故正交矩阵
$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},$$

令 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$，则 $f=-3y_1^2+6y_2^2$.