2017年全国硕士研究生招生考试

数　学（一）

（科目代码:301）

一、选择题:1～8小题,每小题4分,共32分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

1.若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0,\\ b, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则

A. $ab=\frac{1}{2}$.　　B. $ab=-\frac{1}{2}$.　　C. $ab=0$.　　D. $ab=2$.

2.设函数 $f(x)$ 可导,且 $f(x)f'(x)>0$,则

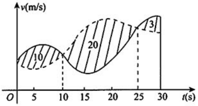
A. $f(1)>f(-1)$.　　B. $f(1)<f(-1)$.

C. $|f(1)|>|f(-1)|$.　　D. $|f(1)|<|f(-1)|$.

3.函数 $f(x,y,z)=x^2y+z^2$ 在点 $(1,2,0)$ 处沿向量 $\boldsymbol{n}=\{1,2,2\}$ 的方向导数为

A. 12　　B. 6.　　C. 4.　　D. 2.

4.甲、乙两人赛跑,计时开始时,甲在乙前方10(单位:m)处,图中,实线表示甲的速度曲线 $v=v_1(t)$(单位:m/s),虚线表示乙的速度曲线 $v=v_2(t)$,三块阴影部分面积的数值依次为10,20,3,计时开始后乙追上甲的时刻记为 t_0(单位:s),则



4题图

A. $t_0=10$.　　B. $15<t_0<20$.

C. $t_0=25$.　　D. $t_0>25$.

5.设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维单位列向量,$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵,则

A. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆.　　B. $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆.

C. $\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆.　　D. $\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆.

6.已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$,则

A. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似,$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似.　　B. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似,$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似.

C. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似.　　D. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似.

7. 设 A，B 为随机事件，若 $0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，则 $P(A\mid B)>P(A\mid \overline{B})$ 的充分必要条件是

A. $P(B\mid A)>P(B\mid \overline{A})$.　　B. $P(B\mid A)<P(B\mid \overline{A})$.

C. $P(\overline{B}\mid A)>P(B\mid \overline{A})$.　　D. $P(\overline{B}\mid A)<P(B\mid \overline{A})$.

8. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geqslant 2)$ 为来自总体 $N(\mu,1)$ 的简单随机样本，记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则下列结论中不正确的是

A. $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布.　　B. $2(X_n-X_1)^2$ 服从 χ^2 分布.

C. $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 服从 χ^2 分布.　　D. $n(\overline{X}-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

9. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，则 $f^{(3)}(0)=$ ________.

10. 微分方程 $y''+2y'+3y=0$ 的通解为 $y=$ ________.

11. 若曲线积分 $\int_L \dfrac{x\mathrm{d}x-ay\mathrm{d}y}{x^2+y^2-1}$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$ 内与路径无关，则 $a=$ ________.

12. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}$ 在区间 $(-1,1)$ 内的和函数 $S(x)=$ ________.

13. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性无关的 3 维列向量组，则向量组 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3$ 的秩为 ________.

14. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=0.5\Phi(x)+0.5\Phi\left(\dfrac{x-4}{2}\right)$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则 $E(X)=$ ________.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本题满分 10 分）

设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$y=f(\mathrm{e}^x,\cos x)$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$.

16.（本题满分 10 分）

求$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$.

17.（本题满分 10 分）

已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 确定，求 $y(x)$ 的极值.

18.（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上具有二阶导数，且 $f(1)>0$，$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}<0$. 证明：

(1) 方程 $f(x)=0$ 在区间$(0,1)$内至少存在一个实根；

(2) 方程 $f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$ 在区间$(0,1)$内至少存在两个不同实根.

19.（本题满分 10 分）

设薄片型物体 S 是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 割下的有限部分，其上任一点的密度为$\mu(x,y,z)=9\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，记圆锥面与柱面的交线为 C.

(1) 求 C 在 xOy 平面上的投影曲线的方程；

(2) 求 S 的质量 M.

20.（本题满分 11 分）

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 有 3 个不同的特征值，且 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

(1) 证明：$r(\boldsymbol{A})=2$；

(2) 设 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，求方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

21.（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$ 在正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$ 下的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$，求 a 的值及一个正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

22.（本题满分 11 分）

设随机变量 X,Y 相互独立，且 X 的概率分布为 $P\{X=0\}=P\{X=2\}=\dfrac{1}{2}$，$Y$ 的概率密度为

$$f(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 求 $P\{Y\leqslant E(Y)\}$；

(2) 求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

23.（本题满分 11 分）

某工程师为了解一台天平的精度，用该天平对一物体的质量做 n 次测量，该物体的质量 μ 是已知的，设 n 次测量结果 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$. 该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i=|X_i-\mu|$ $(i=1,2,\cdots,n)$，利用 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 估计 σ.

(1) 求 Z_1 的概率密度；

(2) 利用一阶矩求 σ 的矩估计量；

(3) 求 σ 的最大似然估计量.

2017 年数学(一)答案解析

一、选择题

1.【答案】A

【解析】$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{2}x}{ax}=\dfrac{1}{2a}$，

若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则$\dfrac{1}{2a}=b$，即 $ab=\dfrac{1}{2}$.

2.【答案】C

【解析】当 $f'(x)>0$ 时，$f(x)$ 单调递增且恒大于 0，故 $f(1)>f(-1)>0$；

当 $f'(x)<0$ 时，$f(x)$ 单调递减且恒小于 0，故 $0>f(-1)>f(1)$.

因此，当 $f(x)f'(x)>0$ 时，$|f(1)|>|f(-1)|$.

3.【答案】D

【解析】方向导数的计算公式为$\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\dfrac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$，

向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦：

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{1}{3},\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{2}{3},\cos\gamma=\frac{2}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{2}{3},$$

经计算得$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,2,0)}=4,\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,2,0)}=1,\left.\dfrac{\partial f}{\partial z}\right|_{(1,2,0)}=0$，

故$\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{(1,2,0)}=\dfrac{1}{3}\times4+\dfrac{2}{3}=2$.

4.【答案】C

【解析】由图可知：

在 $t=10$ s 时，甲比乙领先 20 m；

在 10 s ～ 25 s 内，乙比甲多跑了 20 m，因此乙追上甲的时刻为 $t_0=25$.

5.【答案】A

【解析】设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵，则 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，故不可逆.

6.【答案】B

【解析】矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 的特征值均为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=1$，但特征值 2 的几何重数不全相同.

$r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=r\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=1$，则特征值 2 对应 2 个线性无关的特征向量，同理可知，矩阵

$\boldsymbol{B}$ 属于特征值 2 的线性无关的特征向量为 1 个，矩阵 $\boldsymbol{C}$ 属于特征值 2 的线性无关的特征向量为 2 个，因此 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似.

7.【答案】A

【解析】由 $P(A|B)>P(A|\overline{B})$，得 $\dfrac{P(AB)}{P(B)}>\dfrac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}$，即 $P(AB)>P(A)P(B)$.

进一步有 $P(B)-P(A)P(B)>P(B)-P(AB)$，即 $P(\overline{A})P(B)>P(\overline{A}B)$，

因此 $\dfrac{P(AB)}{P(A)}>P(B)>\dfrac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}$，即 $P(B|A)>P(B|\overline{A})$.

8.【答案】B

【解析】$X_i\sim N(\mu,1)$，则 $X_i-\mu\sim N(0,1)$，从而 $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$，可知 A 正确.

$X_n-X_1\sim N(0,2)$，则 $\dfrac{X_n-X_1}{\sqrt{2}}\sim N(0,1)$，从而 $\dfrac{(X_n-X_1)^2}{2}\sim\chi^2(1)$，可知 B 错误.

虽然 $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(n-1)$，可知 C 正确.

$\overline{X}-\mu\sim N\left(0,\dfrac{1}{n}\right)$，则 $\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)\sim N(0,1)$，从而 $n(\overline{X}-\mu)^2\sim\chi^2(1)$，可知 D 正确.

二、填空题

9.【答案】0

【解析】$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开式为

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=1-x^2+x^4-x^6+o((x^2)^3),$$

因此 $f^{(3)}(0)=0$.

10.【答案】$e^{-x}(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x)$（$C_1,C_2$ 为任意常数）

【解析】二阶齐次微分方程的特征方程为 $\lambda^2+2\lambda+3=0$，解得其特征根为 $\lambda_1=-1+\sqrt{2}\mathrm{i}$，$\lambda_2=-1-\sqrt{2}\mathrm{i}$，因此微分方程的通解为

$$y=e^{-x}(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x)\ (C_1,C_2\text{ 为任意常数}).$$

11.【答案】-1

【解析】令 $P=\dfrac{x}{x^2+y^2-1}$，$Q=-\dfrac{ay}{x^2+y^2-1}$，

若曲线积分 $\int_L P\,dx+Q\,dy$ 在区域 D 内与路径无关，则由格林公式可知 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

而 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2-1)^2}$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{2axy}{(x^2+y^2-1)^2}$，由此可得 $a=-1$.

12.【答案】$\dfrac{1}{(1+x)^2}$

【解析】$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}[(-1)^{n-1}x^n]'=\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n\right]'$，

而在区间$(-1,1)$内，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}=\dfrac{x}{1+x}$，

因此 $S(x)=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)'=\dfrac{1}{(1+x)^2}$.

13.【答案】2

【解析】由于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，因此 $r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3))=r(\boldsymbol{A})$.

而 $r(\boldsymbol{A})=r\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}=2.$

14.【答案】2

【解析】X 的密度函数

$$f(x)=F'(x)=0.5\Phi'(x)+0.25\Phi'\left(\frac{x-4}{2}\right)，其中\ \Phi'(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}，$$

则 $E(X)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-\frac{x^2}{2}}dx+\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-\frac{(x-4)^2}{8}}dx$

$$=0+\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-\frac{(x-4)^2}{8}}dx=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-4)e^{-\frac{(x-4)^2}{8}}dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-4)^2}{8}}dx=2.$$

三、解答题

15.【解析】令 $u(x)=e^x$，$v(x)=\cos x$，则

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=(f_uu_x+f_vv_x)\Big|_{x=0}=(e^x\cdot f_u-\sin x\cdot f_v)\Big|_{x=0}=f_u(1,1)，$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=[e^x\cdot f_u+e^x(f_{uu}u_x+f_{uv}v_x)-\cos x\cdot f_v-\sin x(f_{vu}u_x+f_{vv}v_x)]\Big|_{x=0}$$

$$=(e^x\cdot f_u+e^{2x}\cdot f_{uu}-e^x\cdot\sin x\cdot f_{uv}-\cos x\cdot f_v-e^x\cdot\sin x\cdot f_{vu}+\sin^2x\cdot f_{vv})\Big|_{x=0}$$

$$=f_u(1,1)+f_{uu}(1,1)-f_v(1,1).$$

16.【解析】原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n}\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)\cdot\dfrac{1}{n}=\displaystyle\int_0^1x\ln(1+x)dx=\int_0^1\ln(1+x)d\left(\frac{1}{2}x^2\right)$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1x^2\,\frac{1}{1+x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x(x+1)-(x+1)+1}{1+x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2-x+\ln|x+1|\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{4}.$$

17.【解析】方程两边同时对 x 求导，得

$$3x^2+3y^2y'-3+3y'=0,$$

故
$$y'(y^2+1)=1-x^2,$$

令 $y'=0$，解得 $x=\pm1$，

且当 $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ 时，$y'<0$；当 $x\in(-1,1)$ 时，$y'>0$；

因此 $x=1$ 为极大值点，$x=-1$ 为极小值点，

将 $x=1$ 和 $x=-1$ 代入原方程，则有 $y(1)=1,y(-1)=0$，

故极大值为 1，极小值为 0.

18.【证明】(1) 由 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$ 与极限保号性，可知存在 $C\in(0,1)$，使得 $f(c)<0$.

又因为 $f(1)>0$，故由零点定理知存在 $\eta\in(c,1)\in(0,1)$，使得 $f(\eta)=0$，

故 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 上至少有一个实根.

(2) 即讨论方程 $(f(x)\cdot f'(x))'=0$ 的实根个数. 令

$$g(x)=f(x)\cdot f'(x),$$

由(1)可知，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上至少有一个实根，不妨设为 a，即 $f(a)=0$，

故 $g(a)=0$，

另外，由 $f(0)=f(a)=0$ 可知，存在 $\xi\in(0,a)$ 使得 $f'(\xi)=0$，

因此有 $g(0)=g(\xi)=g(a)=0$，由罗尔定理知 $g'(x)=0$ 在 $(0,\xi)$ 和 (ξ,a) 内各存在一个实根，因此原方程在 $(0,1)$ 上至少有两个实根.

19.【解析】(1) 由 $\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2},\\ z^2=2x\end{cases}$ 知 $x^2+y^2=2x$，

故 C 在 xOy 平面上的投影曲线为 $\begin{cases}(x-1)^2+y^2=1,\\ z=0.\end{cases}$

(2) 令 $D=\{(x,y)\mid(x-1)^2+y^2\leqslant1\}$，则

$$\begin{aligned}M&=\iint\limits_S 9\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dS=\iint\limits_D 9\sqrt{x^2+y^2+x^2+y^2}\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy\\&=\iint\limits_D 9\sqrt{2(x^2+y^2)}\cdot\sqrt{2}\,dx\,dy\\&=\iint\limits_D 18\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy,\end{aligned}$$

令 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$，则 $D=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,0\leqslant r\leqslant2\cos\theta,-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right\}$，故

$$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta}18r^2\,dr\,d\theta=48\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\,d\theta=96\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\,d\theta=64.$$

20. (1)【证明】由于 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出，故 $r(\boldsymbol{A})<3$，且必有零特征值. 又由于 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个不同的特征值，不妨设为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，若 $\lambda_1=0$，则 $\lambda_2\neq0,\lambda_3\neq0$，因此 $r(\boldsymbol{A})\geqslant2$，

综上可知 $r(A)=2$.

(2)【解析】求 $Ax=\beta$ 即求解方程

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

显然 $x=(1,1,1)^T$ 为一个特解，现求解方程 $Ax=0$，即

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0,$$

由于 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$，故

$$(x_1+x_3)\alpha_1+(x_2+2x_3)\alpha_2=0.$$

即 $\begin{cases}x_1+x_3=0,\\x_2+2x_3=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=-x_3,\\x_2=-2x_3,\end{cases}$

故 $Ax=\beta$ 的通解为

$$x=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}\ (k\text{ 为任意常数}).$$

21.【解析】令 $A=\begin{pmatrix}2&1&-4\\1&-1&1\\-4&1&a\end{pmatrix}$，$X=(x_1,x_2,x_3)$，故 $f=X^TAX$.

由于 f 的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$，故 $|A|=0$，因此 $a=2$.

由 $0=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&4\\-1&\lambda+1&-1\\4&-1&\lambda-2\end{vmatrix}$ 可知，A 的特征值为 $\lambda_1=-3,\lambda_2=6,\lambda_3=0$.

由 $(-3E-A)X=0$ 可知对应的特征向量为 $X_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，

由 $(6E-A)X=0$ 可知对应的特征向量为 $X_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，

由 $(0E-A)X=0$ 可知对应的特征向量为 $X_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，且 X_1,X_2,X_3 两两正交.

单位化，得

$$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\gamma_2=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\gamma_3=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},$$

故正交矩阵
$$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},$$

令 $X=QY$，则 $f=-3y_1^2+6y_2^2$.

22.【解析】(1) 由题知 $E(Y)=\int_0^1 y\cdot 2y\mathrm{d}y=\frac{2}{3}y^3\Big|_0^1=\frac{2}{3}$，

故 $P\{Y\leqslant E(Y)\}=P\left\{Y\leqslant\frac{2}{3}\right\}=\int_0^{\frac{2}{3}}2y\mathrm{d}y=y^2\Big|_0^{\frac{2}{3}}=\frac{4}{9}$.

(2) 不妨设 Z 的密度函数为 $f(z)$，分布函数为 $F(z)$，故

当 $z\leqslant 0$ 时，$F(z)=P\{X=0\}P\{Y\leqslant 0\}=0$；

当 $0<z\leqslant 1$ 时，$F(z)=P\{X=0\}P\{Y\leqslant z\}=\frac{1}{2}\int_0^z 2y\mathrm{d}y=\frac{z^2}{2}$，

当 $1<z\leqslant 2$ 时，$F(z)=P\{X=0\}P\{Y\leqslant 1\}=\frac{1}{2}$；

当 $2<z\leqslant 3$ 时，$F(z)=P\{X=0\}P\{Y\leqslant 1\}+P\{X=2\}P\{Y\leqslant z-2\}$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int_0^{z-2}2y\mathrm{d}y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(z-2)^2;$$

当 $z>3$ 时，$F(z)=1$.

因此，$f(z)=\begin{cases}z, & 0<z\leqslant 1,\\ z-2, & 2<z\leqslant 3,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

23.【解析】(1) 由题知 $Z_1=|X_1-\mu|$，$X_1\sim N(\mu,\sigma^2)$，

设 Z_1 的分布函数为 $F(z)$，密度函数为 $f(z)$，则

当 $z<0$ 时，$F(z)=0$；

当 $z\geqslant 0$ 时，$F(z)=P\{Z_1\leqslant z\}=P\{|X_1-\mu|\leqslant z\}=P\left\{\frac{|X_1-\mu|}{\sigma}\leqslant\frac{z}{\sigma}\right\}$
$$=\Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{z}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right)-1,$$

故 Z_1 的分布函数为 $F(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ 2\Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right)-1, & z\geqslant 0,\end{cases}$

密度函数为 $f(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \frac{2}{\sigma}\varphi\left(\frac{z}{\sigma}\right), & z\geqslant 0.\end{cases}$

(2)$E(Z_1)=\int_0^{+\infty} zf(z)\mathrm{d}z=\int_0^{+\infty} z\,\frac{2}{\sigma}\varphi\left(\frac{z}{\sigma}\right)\mathrm{d}z=2\sigma\int_0^{+\infty} t\varphi(t)\mathrm{d}t$

$$=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}\left(\frac{t^2}{2}\right)=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}},$$

故 $\sigma=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}E(Z_1)$，由 $\overline{Z}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_i$ 知，σ 的矩估计量为 $\hat{\sigma}=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\overline{Z}$.

(3) 似然函数为

$$L(\sigma)=f(z_1)\cdots f(z_n)=\frac{2^n}{\sigma^n}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2}\quad(z_i>0;i=1,2,\cdots,n),$$

取对数得

$$\ln L(\sigma)=n\ln 2-n\ln\sigma-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2,$$

令

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\ln L(\sigma)=-\frac{n}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}z_i^2=0,$$

解得 $\sigma=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}z_i^2}$，故 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2}$.