2016 年全国硕士研究生招生考试

数　学　(二)

(科目代码:302)

一、选择题:1 ～ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

1. 设 $a_1 = x(\cos\sqrt{x} - 1)$,$a_2 = \sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x})$,$a_3 = \sqrt[3]{x+1} - 1$,当 $x \to 0^+$ 时,以上三个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是

A. a_1, a_2, a_3.　　B. a_2, a_3, a_1.

C. a_2, a_1, a_3.　　D. a_3, a_2, a_1.

2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & x < 1, \\ \ln x, & x \geqslant 1, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 的一个原函数是

A. $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x - 1), & x \geqslant 1. \end{cases}$　　B. $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x + 1) - 1, & x \geqslant 1. \end{cases}$

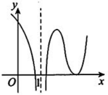
C. $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x + 1) + 1, & x \geqslant 1. \end{cases}$　　D. $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x - 1) + 1, & x \geqslant 1. \end{cases}$

3. 反常积分 ①$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$,②$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$ 的敛散性为

A. ① 收敛,② 收敛.　　B. ① 收敛,② 发散.

C. ① 发散,② 收敛.　　D. ① 发散,② 发散.

4. 设函数 $y = f(x)$ 在$(-\infty, +\infty)$内连续,其导函数的图形如图所示,则



4 题图

A. 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点,曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点

B. 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点,曲线 $y = f(x)$ 有 3 个拐点

C. 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点,曲线 $y = f(x)$ 有 1 个拐点

D. 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点,曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点

5. 设函数 $f_i(x)(i=1,2)$ 具有二阶连续导数,且 $f_i''(x_0) < 0(i=1,2)$,若两条曲线 $y=f_i(x)(i=1,2)$ 在点(x_0, y_0)处具有公切线 $y=g(x)$,且在该点处曲线 $y=f_1(x)$ 的曲率大于曲线 $y=f_2(x)$ 的曲率,则在 x_0 的某个邻域内,有

A. $f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant g(x)$.　　B. $f_2(x) \leqslant f_1(x) \leqslant g(x)$.

C. $f_1(x) \leqslant g(x) \leqslant f_2(x)$.　　D. $f_2(x) \leqslant g(x) \leqslant f_1(x)$.

6. 已知函数 $f(x,y)=\dfrac{e^x}{x-y}$，则

A. $f'_x - f'_y = 0$.　　B. $f'_x + f'_y = 0$.

C. $f'_x - f'_y = f$.　　D. $f'_x + f'_y = f$.

7. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则下列结论错误的是

A. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似.　　B. $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

C. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似.　　D. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

8. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 的正、负惯性指数分别为 1,2，则

A. $a>1$.　　B. $a<-2$.

C. $-2<a<1$.　　D. $a=1$ 或 $a=-2$.

二、填空题：9 ～ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

9. 曲线 $y=\dfrac{x^3}{1+x^2}+\arctan(1+x^2)$ 的斜渐近线方程为 ________.

10. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+n\sin\dfrac{n}{n}\right)=$ ________.

11. 以 $y=x^2-e^x$ 和 $y=x^2$ 为特解的一阶非齐次线性微分方程为 ________.

12. 已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)=(x+1)^2+2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则当 $n\geqslant 2$ 时，$f^{(n)}(0)=$ ________.

13. 已知动点 P 在曲线 $y=x^3$ 上运动，记坐标原点与点 P 间的距离为 l. 若点 P 的横坐标对时间的变化率为常数 v_0，则当点 P 运动到点 $(1,1)$ 时，l 对时间的变化率是 ________.

14. 设矩阵 $\begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 等价，则 $a=$ ________.

三、解答题：15 ～ 23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$.

16.（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)=\int_0^1|t^2-x^2|\mathrm{d}t\ (x>0)$，求 $f'(x)$，并求 $f(x)$ 的最小值.

17.（本题满分 10 分）

已知函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(x^2+y^2)z+\ln z+2(x+y+1)=0$ 确定，求 $z=z(x,y)$ 的极值.

18.（本题满分 10 分）

设 D 是由直线 $y=1,y=x,y=-x$ 围成的有界区域，计算二重积分

$$\iint_D \frac{x^2-xy-y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

19.（本题满分 10 分）

已知 $y_1(x)=\mathrm{e}^x,y_2(x)=u(x)\mathrm{e}^x$ 是二阶微分方程 $(2x-1)y''-(2x+1)y'+2y=0$ 的两个解，若 $u(-1)=\mathrm{e},u(0)=-1$，求 $u(x)$，并写出该微分方程的通解.

20.（本题满分 11 分）

设 D 是由曲线 $y=\sqrt{1-x^2}\ (0\leqslant x\leqslant 1)$ 与 $\begin{cases}x=\cos^3 t,\\ y=\sin^3 t\end{cases}\left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 围成的平面区域，求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积和表面积.

21.（本题满分 11 分）

已知函数 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上连续，在 $\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 内是函数 $\dfrac{\cos x}{2x-3\pi}$ 的一个原函数，且 $f(0)=0$.

(1) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上的平均值；

(2) 证明：$f(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 内存在唯一零点.

22.（本题满分 11 分）

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 1 & 0 & a \\ a+1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2a-2 \end{pmatrix}$，且方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 无解.

(1) 求 a 的值；

(2) 求方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

23.（本题满分 11 分）

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}^{99}$；

(2) 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 满足 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{BA}$，记 $\boldsymbol{B}^{100}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 分别表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合.

2016 年数学(二)答案解析

一、选择题

1.【答案】B

【解析】当 $x \to 0^+$ 时,

$$a_1 = x(\cos\sqrt{x} - 1) \sim -\frac{1}{2}x^2, a_2 = \sqrt{x}\ln(1 + \sqrt[3]{x}) \sim x^{\frac{5}{6}}, a_3 = \sqrt[3]{x+1} - 1 \sim \frac{1}{3}x.$$

因此,这三个无穷小量按照从低阶到高阶的排序为 a_2, a_3, a_1.

2.【答案】D

【解析】当 $x < 1$ 时,$F(x) = (x-1)^2 + C_1$(C_1 为任意常数);

当 $x \geqslant 1$ 时,$F(x) = x(\ln x - 1) + C_2$($C_2$ 为任意常数).

函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处连续且 $f(1) = 0$,即 $F(x)$ 在 $x = 1$ 处导数存在,故

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = 0,$$

由此可得 $C_1 = C_2 - 1$,

观察选项可取 $C_1 = 0, C_2 = 1$,则 $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x - 1) + 1, & x \geqslant 1. \end{cases}$

3.【答案】B

【解析】对于 ①:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx = \lim_{u \to 0^-} \int_{-\infty}^{u} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx = \lim_{u \to 0^-} \left(-e^{\frac{1}{x}} \Big|_{-\infty}^{u}\right) = 1,$$

则反常积分 ① 收敛.

对于 ②:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx = \lim_{u \to 0^+} \int_{u}^{+\infty} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx = \lim_{u \to 0^+} \left(-e^{\frac{1}{x}} \Big|_{u}^{+\infty}\right) = -1 + \lim_{u \to 0^+} e^{\frac{1}{u}},$$

极限不存在,则反常积分 ② 发散.

4.【答案】B

【解析】设 $f'(x)$ 与 x 轴的交点为 x_1, x_2, x_3(从左到右). 由图可知,在 x_1, x_2 左右两侧 $f'(x)$ 异号,因此 $f(x)$ 在 x_1, x_2 处均取得极值.

从图中可以看出,$f'(x)$ 有两个转折点 x_4, x_5(从左到右),并且在 x_4, x_5 左右两侧 $f''(x)$ 异号,因此 x_4, x_5 即为 $f(x)$ 的两个拐点.

值得注意的是,$x = 1$ 也是 $f(x)$ 的拐点,虽然 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处无定义,但当 $x < 1$ 时,$f''(x) < 0$,当 $1 < x < x_4$ 时,$f''(x) > 0$,因此 $x = 1$ 是 $f(x)$ 的拐点,即 $f(x)$ 一共有 3 个拐点.

5.【答案】A

【解析】曲率 $K=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$，由题知 $f_1(x),f_2(x)$ 在点 (x_0,y_0) 处有公切线且 $K_1>K_2$，

可得 $|f_1''(x_0)|>|f_2''(x_0)|$，又 $f_i''(x_0)<0$，所以有

$$f_1''(x_0)<f_2''(x_0)<0=g''(x_0).$$

在 x_0 的 δ 邻域 $U(x_0,\delta)$ 内，有 $\begin{cases}f_1'(x)>f_2'(x)>g'(x),x\in(x_0-\delta,x_0),\\ f_1'(x)<f_2'(x)<g'(x),x\in(x_0,x_0+\delta),\end{cases}$

且
$$f_1(x_0)=f_2(x_0)=g(x_0),$$

故在 x_0 的 δ 邻域 $U(x_0,\delta)$ 内，有 $f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant g(x)$.

6.【答案】D

【解析】$f_x'=\dfrac{e^x(x-y)-e^x}{(x-y)^2}$，$f_y'=\dfrac{e^x}{(x-y)^2}$，因此 $f_x'+f_y'=f$.

7.【答案】C

【解析】$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

两边同时取逆得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}^{-1}$，因此 $\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$，从而 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

两边同时取转置得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，显然 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 不相似.

8.【答案】C

【解析】二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}$，

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-a-2)(\lambda-a+1)^2=0$，

故其特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=a-1,\lambda_3=a+2$.

若二次型的正、负惯性指数分别为 1,2，则 $\begin{cases}a+2>0,\\a-1<0,\end{cases}$ 即 $-2<a<1$.

二、填空题

9.【答案】$y=x+\dfrac{\pi}{2}$

【解析】$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{1+x^2}+\dfrac{\arctan(1+x^2)}{x}\right]=1$，

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{1+x^2}-x+\arctan(1+x^2)\right]$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left[-\frac{x}{1+x^2}+\arctan(1+x^2)\right]=\frac{\pi}{2}.$$

因此，曲线的斜渐近线方程为 $y=x+\dfrac{\pi}{2}$.

10.【答案】$\sin 1-\cos 1$

【解析】原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\sin\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n}{n}\sin\frac{n}{n}\right)$.

由定积分的定义可知,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\sin\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n}{n}\sin\frac{n}{n}\right)=\int_0^1 x\sin x\,\mathrm{d}x=\sin 1-\cos 1.$$

11.【答案】$y'-y=2x-x^2$

【解析】设该一阶非齐次线性微分方程为 $y'+p(x)y=q(x)$,

由题意可得 $y=\mathrm{e}^x$ 为齐次线性微分方程 $y'+p(x)y=0$ 的通解,将其代入微分方程中可得

$$p(x)=-1.$$

由非齐次线性微分方程解的结构,可知 $y=x^2$ 为非齐次线性微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的特解,将其代入微分方程中可得 $q(x)=2x-x^2$.

因此,该一阶非齐次线性微分方程为 $y'-y=2x-x^2$.

12.【答案】$5\cdot 2^{n-1}$

【解析】经计算得

$$f'(x)=2(x+1)+2f(x),$$
$$f''(x)=2+2f'(x),$$
$$f'''(x)=2f''(x),\cdots,$$
$$f^{(n)}(x)=2^{n-2}f''(x),$$

则 $f^{(n)}(0)=2^{n-2}f''(0)$,而 $f'(0)=4,f''(0)=10$,故 $f^{(n)}(0)=5\cdot 2^{n-1}$.

13.【答案】$2\sqrt{2}v_0$

【解析】由题意可得 $l(t)=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}=\sqrt{x^2(t)+x^6(t)}$,则

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{x(t)+3x^5(t)}{\sqrt{x^2(t)+x^6(t)}}\cdot v_0,$$

因此当点 P 运动到点$(1,1)$时,$\left.\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right|_{x=1}=\frac{4}{\sqrt{2}}v_0=2\sqrt{2}v_0$.

14.【答案】2

【解析】令矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&-1&-1\\-1&a&-1\\-1&-1&a\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$.

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价,则 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$. 经计算,$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\lambda(\lambda^2-\lambda-1)$,故 $\lambda=0$ 为其特征值,则 $|-\boldsymbol{A}|=0$,解得 $a=2$ 或 $a=-1$.

当 $a=-1$ 时,$r(\boldsymbol{A})=1\neq r(\boldsymbol{B})=2$,舍去,所以 $a=2$.

三、解答题

15.【解析】由泰勒展开得

$$\cos 2x = 1 - \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!} + \cdots, -\infty < x < \infty;$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots, -\infty < x < +\infty.$$

故原式 $= \lim\limits_{x \to 0}\left[1 - \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!} + 2x\left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + o(x^4)\right]^{\frac{1}{x^4}}$

$= \lim\limits_{x \to 0}\left[1 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)\right]^{\frac{1}{x^4}} = \lim\limits_{x \to 0}\left(1 + \frac{1}{3}x^4\right)^{\frac{3}{x^4}\cdot\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}}.$

16.【解析】当 $x \geqslant 1$ 时，$f(x) = \int_0^1 (x^2 - t^2)\,dt = x^2 - \frac{1}{3}$；

当 $0 < x < 1$ 时，$f(x) = \int_0^x (x^2 - t^2)\,dt + \int_x^1 (t^2 - x^2)\,dt = \frac{4}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}.$

且 $\lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = 2$，故 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导，

所以
$$f'(x) = \begin{cases} 4x^2 - 2x, & 0 < x < 1, \\ 2x, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

故 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$，$f'(x) < 0$；$x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$，$f'(x) > 0$.

因此 $f(x)$ 的最小值为

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} = \frac{1}{4}.$$

17.【解析】方程两边分别同时对 x, y 求导，则有

$$\begin{cases} 2xz + (x^2 + y^2) z_x + \frac{1}{z} z_x + 2 = 0, \\ 2yz + (x^2 + y^2) z_y + \frac{1}{z} z_y + 2 = 0, \end{cases}$$

化简得

$$\begin{cases} \left(x^2 + y^2 + \frac{1}{z}\right) z_x = -2(1 + xz), \\ \left(x^2 + y^2 + \frac{1}{z}\right) z_y = -2(1 + yz), \end{cases} \tag{1}$$

令 $z_x = z_y = 0$，则有

$$x = -\frac{1}{z}, y = -\frac{1}{z},$$

故 $z(x, y)$ 的极值为 $z_0 = z\left(-\frac{1}{z_0}, -\frac{1}{z_0}\right)$，代入原方程有

$$2z_0 \frac{1}{z_0^2} + \ln z_0 + 2\left(1 - \frac{2}{z_0}\right) = 0,$$

即 $\ln\frac{1}{z_0}+\frac{2}{z_0}=2$，解得 $z_0=1$.

现验证$(-1,-1)$是极值点. 方程(1)两边分别对 x,y 求导，得

$$\begin{cases}\left(2x-\frac{1}{z^2}z_x\right)z_x+\left(x^2+y^2+\frac{1}{z}\right)z_{xx}=-2(z+xz_x),\\ \left(2y-\frac{1}{z^2}z_y\right)z_x+\left(x^2+y^2+\frac{1}{z}\right)z_{xy}=-2xz_y,\\ \left(2y-\frac{1}{z^2}z_y\right)z_y+\left(x^2+y^2+\frac{1}{z}\right)z_{yy}=-2(z+yz_y),\end{cases}$$

故 $A=z_{xx}\mid_{(-1,-1)}=-\frac{2}{3}, B=z_{xy}\mid_{(-1,-1)}=0, C=z_{yy}\mid_{(-1,-1)}=-\frac{2}{3}$.

由于 $AC-B^2>0, A<0$，故 $z(x,y)$ 的极大值为 $z(-1,-1)=1$.

18.【解析】由对称性可知，

$$\begin{aligned}原式&=\iint_D\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D\left(1-\frac{2y^2}{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\times2\times1-\int_0^1\int_{-y}^{y}\frac{2y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=1-\int_0^1\int_{-y}^{y}2y\,\mathrm{d}\left(\arctan\frac{x}{y}\right)\mathrm{d}y\\&=1-2\int_0^1\left(y\arctan\frac{x}{y}\Big|_{-y}^{y}\right)\mathrm{d}y\\&=1-\int_0^1\pi y\,\mathrm{d}y=1-\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

19.【解析】将 $y_2(x)=u(x)\mathrm{e}^x$ 代入微分方程，得到

$$(2x-1)(u+2u'+u'')-(2x+1)(u+u')+2u=0,$$

化简得

$$(2x-1)u''+(2x-3)u'=0.$$

(1) 当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$u'=0$，此时 $u(x)=C$（C 为任意常数），不成立；

(2) 当 $x\neq\frac{1}{2}$ 时，有 $u''+\frac{2x-3}{2x-1}u'=0$，故

$$\frac{1}{2x-1}\mathrm{e}^x\left(u''+\frac{2x-3}{2x-1}u'\right)=0，即\left(\frac{1}{2x-1}\mathrm{e}^xu'\right)'=0.$$

因此 $u'=C_1(2x-1)\mathrm{e}^{-x}$，故

$$u(x)=\int C_1(2x-1)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-C_1(2x+1)\mathrm{e}^{-x}+C_2.$$

由 $u(-1)=\mathrm{e}, u(0)=-1$ 可知

$$\begin{cases}\mathrm{e}C_1+C_2=\mathrm{e},\\-C_1+C_2=-1,\end{cases}解得\begin{cases}C_1=1,\\C_2=0.\end{cases}$$

故 $u(x)=-(2x+1)e^{-x}$，因此该方程的通解为

$$y(t)=k_1e^x+k_2(2x+1)\ (k_1,k_2\text{ 为任意常数}).$$

20.【解析】$V=\pi\int_0^1(1-x^2)dx-\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sin^6t\,d(\cos^3t)=\dfrac{2\pi}{3}-3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7t(1-\sin^2t)dt$

$$=\frac{2\pi}{3}-3\pi(I_7-I_9)=\frac{18}{35}\pi.$$

$$S=2\pi\int_0^1\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1+y'^2}\,dx+2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3t\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$$

$$=2\pi+2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3t\sqrt{(3\cos^2t\sin t)^2+(3\sin^2t\cos t)^2}\,dt$$

$$=2\pi+2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\sin^4t\cos t\,dt=2\pi+6\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4t\,d(\sin t)=\frac{16}{5}\pi.$$

21.【解析】(1) $f(x)=\int_0^x\dfrac{\cos t}{2t-3\pi}dt$，

故 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上的平均值为

$$I=\frac{2}{3\pi}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\int_0^x\frac{\cos t}{2t-3\pi}dt\,dx=\frac{2}{3\pi}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\int_t^{\frac{3\pi}{2}}\frac{\cos t}{2t-3\pi}dx\,dt=\frac{2}{3\pi}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\frac{\cos t}{2t-3\pi}\left(\frac{3}{2}\pi-t\right)dt=\frac{1}{3\pi}.$$

(2) 由题知，$f'(x)=\dfrac{\cos x}{2x-3\pi}$，

所以当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 时，$f'(x)>0$. 故 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ 为 $f(x)$ 的极小值，且

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{2t-3\pi}dt<0;$$

又端点值

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\frac{\cos t}{2t-3\pi}dt>0,\ f(0)=0.$$

故 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 内存在唯一零点，且唯一零点在区间 $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 内.

22.【解析】(1) $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1-a&0\\1&0&a&1\\a+1&1&a+1&2a-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&a&1\\0&1&1-2a&-1\\0&0&a(2-a)&a-2\end{array}\right)$，

因为方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 无解，则 $r(\boldsymbol{A})\neq r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})$，故 $a=0$.

(2) 由(1)知，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\end{pmatrix},$$

$$(A^TA \mid A^T\beta)=\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&2&-1\\2&2&2&-2\\2&2&2&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

故方程组 $AX=\beta$ 的通解为 $X=k\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$（$k$ 为任意常数）.

23.【解析】(1) 由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-1\\-2&\lambda+3&0\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+2)(\lambda+1)=0$ 可知 A 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=-1,\lambda_3=-2$. 将 A 对角化，

当 $\lambda_1=0$ 时，由 $(0E-A)X=0$ 得特征向量 $X_1=\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_2=-1$ 时，由 $(-E-A)X=0$ 得特征向量 $X_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_3=-2$ 时，由 $(-2E-A)X=0$ 得特征向量 $X_3=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$.

令 $P=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\2&0&0\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$，因此

$$P^{-1}A^{99}P=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&(-1)^{99}&0\\0&0&(-2)^{99}\end{pmatrix},$$

所以有 $A^{99}=P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&(-1)^{99}&0\\0&0&(-2)^{99}\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}2^{99}-2&1-2^{99}&2-2^{98}\\2^{100}-2&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}$.

(2) $B^{100}=B^{98}B^2=B^{98}BA=\cdots=BA^{99}$，

故 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A^{99}$，因此有

$$\begin{cases}\beta_1=(2^{99}-2)\alpha_1+(2^{100}-2)\alpha_2,\\\beta_2=(1-2^{99})\alpha_1+(1-2^{100})\alpha_2,\\\beta_3=(2-2^{98})\alpha_1+(2-2^{99})\alpha_2.\end{cases}$$