2016年全国硕士研究生招生考试

数 学 (三)

(科目代码:303)

一、选择题:1～8小题,每小题4分,共32分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

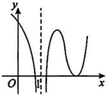
1. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,其导函数的图形如下图所示,则

A. 函数 $f(x)$ 有2个极值点,曲线 $y=f(x)$ 有2个拐点.

B. 函数 $f(x)$ 有2个极值点,曲线 $y=f(x)$ 有3个拐点.

C. 函数 $f(x)$ 有3个极值点,曲线 $y=f(x)$ 有1个拐点.

D. 函数 $f(x)$ 有3个极值点,曲线 $y=f(x)$ 有2个拐点.



1题图

2. 已知函数 $f(x,y)=\dfrac{e^x}{x-y}$,则

A. $f'_x-f'_y=0$.　B. $f'_x+f'_y=0$.　C. $f'_x-f'_y=f$.　D. $f'_x+f'_y=f$.

3. 设 $J_i=\iint\limits_{D_i}\sqrt[3]{x-y}\,dx\,dy\ (i=1,2,3)$,其中 $D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$,

$D_2=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant \sqrt{x}\}$,$D_3=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,x^2\leqslant y\leqslant 1\}$,则

A. $J_1<J_2<J_3$.　B. $J_3<J_1<J_2$.　C. $J_2<J_3<J_1$.　D. $J_2<J_1<J_3$.

4. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)$($k$ 为常数)

A. 绝对收敛.　B. 条件收敛.　C. 发散.　D. 收敛性与 k 有关.

5. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵,且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,则下列结论错误的是

A. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似.　B. $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

C. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似.　D. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

6. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 的正、负惯性指数分别为1,2,则

A. $a>1$.　B. $a<-2$.

C. $-2<a<1$.　D. $a=1$ 或 $a=-2$.

7. 设 A,B 为两个随机事件,且 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$,如果 $P(A \mid B)=1$,则

A. $P(\overline{B} \mid \overline{A})=1$.　　B. $P(A \mid \overline{B})=0$.　　C. $P(A \cup B)=1$.　　D. $P(B \mid A)=1$.

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且 $X \sim N(1,2), Y \sim N(1,4)$,则 $D(XY)=$

A. 6.　　B. 8.　　C. 14.　　D. 15.

二、填空题:9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

9. 已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=2$,则 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)=$________.

10. 极限 $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n^2}\left(\sin \dfrac{1}{n}+2\sin \dfrac{2}{n}+\cdots+n\sin \dfrac{n}{n}\right)=$________.

11. 设函数 $f(u,v)$ 可微,$z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z-y^2=x^2 f(x-z,y)$ 确定,

则 $dz\big|_{(0,1)}=$________.

12. $D=\{(x,y) \mid |x| \leqslant y \leqslant 1, -1 \leqslant x \leqslant 1\}$,则 $\iint\limits_D x^2 e^{-y^2}\,dx\,dy=$________.

13. 行列式 $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}=$________.

14. 设袋中有红、白、黑球各 1 个,从中有放回地取球,每次取 1 个,直到三种颜色的球都取到时停止,则取球次数恰好为 4 的概率为________.

三、解答题:15 ~ 23 小题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x \to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$.

16.(本题满分 10 分)

设某商品的最大需求量为 1 200 件,该商品的需求函数为 $Q=Q(P)$,需求弹性 $\eta=\dfrac{P}{120-P}(\eta>0)$,$P$ 为单价(万元).

(1) 求需求函数的表达式;

(2) 求 $P=100$ 万元时的边际收益,并说明其经济意义.

17.（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)=\int_0^1 |t^2-x^2|\mathrm{d}t\,(x>0)$，求 $f'(x)$，并求 $f(x)$ 的最小值.

18.（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 连续，且满足 $\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t=\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-x}-1$，求 $f(x)$.

19.（本题满分 10 分）

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$ 的收敛域及和函数.

20.（本题满分 11 分）

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1-a\\ 1 & 0 & a\\ a+1 & 1 & a+1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2a-2\end{pmatrix}$，且方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 无解.

(1) 求 a 的值；

(2) 求方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

21.（本题满分 11 分）

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

(1) 求 A^{99}；

(2) 设 3 阶矩阵 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 满足 $B^2=BA$，记 $B^{100}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，将 β_1,β_2,β_3 分别表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合.

22.（本题满分 11 分）

设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y)\mid 0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\}$ 上服从均匀分布，

令 $U=\begin{cases}1, & X\leqslant Y,\\ 0, & X>Y.\end{cases}$

(1) 写出 (X,Y) 的概率密度；

(2) 问 U 与 X 是否相互独立？并说明理由.

(3) 求 $Z=U+X$ 的分布函数 $F(z)$.

23.（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{\theta^3}, & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 $\theta\in(0,+\infty)$ 为未知参数，X_1,X_2,X_3 为来自总体 X 的简单随机样本，令

$$T=\max\{X_1,X_2,X_3\}.$$

(1) 求 T 的概率密度；

(2) 确定 a，使得 $E(aT)=\theta$.

2016 年数学(三)答案解析

一、选择题

1.【答案】B

【解析】设 $f'(x)$ 与 x 轴的交点为 x_1,x_2,x_3(从左到右). 由图可知，在 x_1,x_2 左右两侧 $f'(x)$ 异号，因此 $f(x)$ 在 x_1,x_2 处均取得极值.

从图中可以看出，$f'(x)$ 有两个转折点 x_4,x_5(从左到右)，并且在 x_4,x_5 左右两侧 $f''(x)$ 异号，因此 x_4,x_5 即为 $f(x)$ 的两个拐点.

值得注意的是，$x=1$ 也是 $f(x)$ 的拐点，虽然 $f(x)$ 在 $x=1$ 处无定义，但当 $x<1$ 时，$f''(x)<0$，当 $1<x<x_4$ 时，$f''(x)>0$，因此 $x=1$ 是 $f(x)$ 的拐点，即 $f(x)$ 一共有 3 个拐点.

2.【答案】D

【解析】$f'_x=\dfrac{e^x(x-y)-e^x}{(x-y)^2}$，$f'_y=\dfrac{e^x}{(x-y)^2}$，因此 $f'_x+f'_y=f$.

3.【答案】B

【解析】因为 D_1 关于 $y=x$ 对称，所以由轮换对称性得

$$J_1=\iint\limits_{D_1}\sqrt[3]{x-y}\,dx\,dy=\iint\limits_{D_1}\sqrt[3]{y-x}\,dx\,dy,$$

故 $J_1=0$；

令 $D_0=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1, y^2\leqslant y\leqslant\sqrt{x}\}$，

因为 D_0 关于 $y=x$ 对称，所以由轮换对称性得 $J_0=0$，

$$则 J_2=\iint\limits_{D_2}\sqrt[3]{x-y}\,dx\,dy=\iint\limits_{D_0}\sqrt[3]{x-y}\,dx\,dy+\iint\limits_{D_2\backslash D_0}\sqrt[3]{x-y}\,dx\,dy=\iint\limits_{D_2\backslash D_0}\sqrt[3]{x-y}\,dx\,dy>0,$$

$$J_3=\iint\limits_{D_3}\sqrt[3]{x-y}\,dx\,dy=\iint\limits_{D_0}\sqrt[3]{x-y}\,dx\,dy+\iint\limits_{D_3\backslash D_0}\sqrt[3]{x-y}\,dx\,dy=\iint\limits_{D_3\backslash D_0}\sqrt[3]{x-y}\,dx\,dy<0,$$

从而 $J_3<J_1<J_2$.

4.【答案】A

【解析】$\left|\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)\right|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$，令

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{i}}-\frac{1}{\sqrt{i+1}}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ 收敛，

因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)$ 绝对收敛.

5.【答案】C

【解析】$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

两边同时取逆得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}^{-1}$，因此 $\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$，

从而 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 两边同时取转置得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，显然 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似，但 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 不相似.

6.【答案】C

【解析】二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$，

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-a-2)(\lambda-a+1)^2=0$，

故其特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=a-1,\lambda_3=a+2$.

若二次型的正、负惯性指数分别为 1,2，则 $\begin{cases} a+2>0, \\ a-1<0, \end{cases}$ 即 $-2<a<1$.

7.【答案】A

【解析】由 $P(A|B)=1$ 可知 $B\subseteq A$，则 $\overline{A}\subseteq\overline{B}$，从而 $P(\overline{B}|\overline{A})=1$.

8.【答案】C

【解析】由题意可得 $E(X)=E(Y)=1,D(X)=2,D(Y)=4$.

由随机变量 X 与 Y 相互独立，得 $E(XY)=E(X)E(Y)=1$，

$$E(X^2)=D(X)+E^2(X)=3,E(Y^2)=D(Y)+E^2(Y)=5,$$

故 $D(XY)=E(X^2Y^2)-E^2(XY)=E(X^2)E(Y^2)-[E(X)E(Y)]^2=14$.

二、填空题

9.【答案】6

【解析】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{\mathrm{e}^{3x}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}f(x)\sin 2x}{3x}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to0}f(x)=2$，

则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=6$.

10.【答案】$\sin 1-\cos 1$

【解析】原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n}\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+\dfrac{n}{n}\sin\dfrac{n}{n}\right)$.

由定积分的定义可知，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\sin\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n}{n}\sin\frac{n}{n}\right)=\int_0^1 x\sin x\,\mathrm{d}x=\sin 1-\cos 1.$$

11.【答案】$-\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y$

【解析】将 $x=0,y=1$ 代入题中所给方程，得 $z=1$.

方程两边同时对 x 求偏导，得 $z+(x+1)z_x=2xf(u,v)+x^2f_1'\cdot(1-z_x)$，

将点(0,1,1)代入其中得 $z_x|_{(0,1)}=-1$；

方程两边同时对 y 求偏导，得 $(x+1)z_y-2y=x^2[f_1'\cdot(-z_y)+f_2']$，

将点(0,1,1)代入其中得 $z_y|_{(0,1)}=2$，

因此，$dz|_{(0,1)}=-dx+2dy$.

12.【答案】$\frac{1}{3}-\frac{2}{3e}$

【解析】$\iint\limits_D x^2e^{-y^2}dxdy=\int_0^1 e^{-y^2}dy\int_{-y}^{y}x^2dx=\frac{1}{3}\int_0^1 e^{-y^2}\left(x^3\Big|_{-y}^{y}\right)dy=\frac{2}{3}\int_0^1 e^{-y^2}\cdot y^3dy$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1 e^{-y^2}\cdot y^2d(y^2)=-\frac{1}{3}\left[y^2e^{-y^2}+e^{-y^2}\right]\Big|_0^1=\frac{1}{3}-\frac{2}{3e}.$$

13.【答案】$\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4$

【解析】按第一列展开

$$\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda^3+\lambda^2+2\lambda+3)+4=\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4.$$

14.【答案】$\frac{2}{9}$

【解析】若取球次数恰好为4，则前三次只能取到两种颜色的球，第四次为第三种颜色，

则 $P=\frac{C_3^2C_3^1C_2^1}{3^4}=\frac{2}{9}$.

三、解答题

15.【解析】由泰勒展开得

$$\cos 2x=1-\frac{4x^2}{2!}+\frac{16x^4}{4!}+\cdots,-\infty<x<\infty;$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots,-\infty<x<+\infty.$$

故原式$=\lim\limits_{x\to 0}\left[1-\frac{4x^2}{2!}+\frac{16x^4}{4!}+2x\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)+o(x^4)\right]^{\frac{1}{x^4}}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{1}{3}x^4+o(x^4)\right]^{\frac{1}{x^4}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{3}x^4\right)^{\frac{3}{x^4}\cdot\frac{1}{3}}=e^{\frac{1}{3}}.$$

16.【解析】(1) 由 $\eta=-\frac{dQ/dP}{Q/P}=\frac{P}{120-P}$ 可知

$$\frac{dQ}{dP}+\frac{1}{120-P}Q=0,$$

解得 $Q=C(120-P)$，由 $Q(0)=1\ 200$ 知 $C=10$，故 $Q(P)=1\ 200-10P$.

(2) 收益函数

$$R(Q)=PQ=\frac{(1\ 200-Q)Q}{10},$$

故$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}=\frac{1\ 200-2Q}{10}$.

因此当 $P=100$ 时,$Q=200$,此时$\left.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}\right|_{Q=200}=80$.

其经济意义为销售第 201 件商品所得利益为 80 万元.

17.【解析】当 $x\geqslant1$ 时,$f(x)=\int_0^1(x^2-t^2)\mathrm{d}t=x^2-\frac{1}{3}$;

当 $0<x<1$ 时,$f(x)=\int_0^x(x^2-t^2)\mathrm{d}t+\int_x^1(t^2-x^2)\mathrm{d}t=\frac{4}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3}$.

且 $\lim\limits_{x\to1^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to1^-}f'(x)=2$,故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导.

所以

$$f'(x)=\begin{cases}4x^2-2x, & 0<x<1;\\ 2x, & x\geqslant1.\end{cases}$$

故 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$,$f'(x)<0$;$x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$,$f'(x)>0$. 因此 $f(x)$ 的最小值为

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}=\frac{1}{4}.$$

18.【解析】令 $x-t=u$,则$\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$,

又$\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$,故原式可化为

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-x}-1,$$

上式两边同时对 x 求导得

$$f(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)-xf(x)-\mathrm{e}^{-x}=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\mathrm{e}^{-x},$$

可得 $f(0)=-1$,

上式两边再对 x 求导得

$$f'(x)=f(x)+\mathrm{e}^{-x},\text{即 } f'(x)-f(x)=\mathrm{e}^{-x},$$

解得 $f(x)=\left(\int\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{\int-1\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)\mathrm{e}^{-\int-1\mathrm{d}x}=C\mathrm{e}^{x}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}$,

由 $f(0)=-1$,得 $C=-\frac{1}{2}$,故 $f(x)=-\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x})$.

19.【解析】由$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)(2n+3)}{(n+1)(2n+1)}=1$ 得收敛半径 $R=1$.

当 $x=\pm1$ 时,该级数收敛,故收敛域为 $[-1,1]$.

和函数 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)(2n+1)}x^{2n+2}$.

(1) 当 $-1<x<1$ 时，

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+2)}{(n+1)(2n+1)}x^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)}x^{2n+1},$$

$$S''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(2n+1)}{2n+1}x^{2n}=\frac{2}{1-x^2}.$$

积分得 $S'(x)=\int\dfrac{2}{1-x^2}dx=\int\left(\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}\right)dx=\ln\dfrac{1+x}{1-x}+C_1$，

$$S(x)=\int\left(\ln\frac{1+x}{1-x}+C_1\right)dx=(1+x)\ln(1+x)-(1-x)\ln(1-x)+C_1x+C_2.$$

由 $S(0)=0,S'(0)=0$ 知 $C_1=C_2=0$，故 $S(x)=(1+x)\ln(1+x)-(1-x)\ln(1-x)$.

(2) 当 $x=\pm1$ 时，

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(2n+1)}=2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\right)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=2\ln 2.$$

故 $S(x)=\begin{cases}(1+x)\ln(1+x)-(1-x)\ln(1-x), & -1<x<1,\\ 2\ln 2, & x=\pm1.\end{cases}$

20.【解析】(1) $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1-a&0\\1&0&a&1\\a+1&1&a+1&2a-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&a&1\\0&1&1-2a&-1\\0&0&a(2-a)&a-2\end{array}\right)$，

因为方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 无解，则 $r(\boldsymbol{A})\neq r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})$，故 $a=0$.

(2) 由(1)知，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\end{pmatrix},$$

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc:c}3&2&2&-1\\2&2&2&-2\\2&2&2&-2\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&1\\0&1&1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

故方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=k\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$ (k 为任意常数).

21.【解析】(1) 由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-1\\-2&\lambda+3&0\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+2)(\lambda+1)=0$ 可知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$\lambda_1=0,\lambda_2=-1,\lambda_3=-2$. 将 $\boldsymbol{A}$ 对角化，

当 $\lambda_1=0$ 时，由 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 得特征向量 $\boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_2=-1$ 时，由 $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 得特征向量 $\boldsymbol{X}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_3=-2$ 时，由 $(-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 得特征向量 $\boldsymbol{X}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\2&0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$，因此

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{99}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&(-1)^{99}&0\\0&0&(-2)^{99}\end{pmatrix},$$

所以有 $\boldsymbol{A}^{99}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&(-1)^{99}&0\\0&0&(-2)^{99}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}2^{99}-2&1-2^{99}&2-2^{98}\\2^{100}-2&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}$.

(2) $\boldsymbol{B}^{100}=\boldsymbol{B}^{98}\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}^{98}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\cdots=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{99}$，

故 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A}^{99}$，因此有

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=(2^{99}-2)\boldsymbol{\alpha}_1+(2^{100}-2)\boldsymbol{\alpha}_2,\\ \boldsymbol{\beta}_2=(1-2^{99})\boldsymbol{\alpha}_1+(1-2^{100})\boldsymbol{\alpha}_2,\\ \boldsymbol{\beta}_3=(2-2^{98})\boldsymbol{\alpha}_1+(2-2^{99})\boldsymbol{\alpha}_2.\end{cases}$$

22.【解析】(1) 区域 D 的面积为

$$S_D=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\mathrm{d}x=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3},$$

故 (X,Y) 的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}3, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) 设 U 和 X 的联合分布函数为 $G(u,x)$，

$$G(0,t)=P\{U=0,X\leqslant t\}=P\{X>Y,X\leqslant t\}=\int_0^t\int_{x^2}^{x}f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\frac{3}{2}t^2-t^3;$$

$$G(1,t)=P\{U=1,X\leqslant t\}=2t^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}t^2.$$

由于

$$P\{U=0\}=P\{X>Y\}=\int_0^1\int_{x^2}^{x} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}=P\{U=1\},$$

显然

$$G(u,x)\neq P\{U=u\}P\{X\leqslant x\},$$

故 U 与 X 不独立.

(3) 当 $z<0$ 时，$F(z)=0$；

当 $0\leqslant z<1$ 时，$F(z)=P\{U=0,X\leqslant z\}=\frac{3}{2}z^2-z^3$；

当 $1\leqslant z<2$ 时，$F(z)=P\{U=1,X\leqslant z-1\}+P\{U=0,X\leqslant z\}$

$$=2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(z-1)^2+\frac{1}{2};$$

当 $z\geqslant 2$ 时，$F(z)=1$.

故

$$F(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \frac{3}{2}z^2-z^3, & 0\leqslant z<1,\\ 2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(z-1)^2+\frac{1}{2}, & 1\leqslant z<2,\\ 1, & z\geqslant 2.\end{cases}$$

23.【解析】(1) 当 $0<x\leqslant\theta$ 时，X 的分布函数为

$$F(x)=\int_0^x\frac{3t^2}{\theta^3}\mathrm{d}t=\frac{x^3}{\theta^3}.$$

故

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ \frac{x^3}{\theta^3}, & 0<x\leqslant\theta,\\ 1, & x>\theta.\end{cases}$$

设 T 的分布函数为 $G(t)$，则当 $0<t\leqslant\theta$ 时，

$$G(t)=P\{T\leqslant t\}=P\{X_1\leqslant t,X_2\leqslant t,X_3\leqslant t\}$$

$$=P\{X_1\leqslant t\}P\{X_2\leqslant t\}P\{X_3\leqslant t\}=\frac{t^9}{\theta^9},$$

故

$$G(t)=\begin{cases}0, & t\leqslant 0,\\ \frac{t^9}{\theta^9}, & 0<t\leqslant\theta,\\ 1, & t>\theta,\end{cases}$$

因此 T 的密度函数为

$$g(t)=\begin{cases}\dfrac{9t^8}{\theta^9}, & 0<t<\theta.\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) $E(T)=\int_0^\theta \dfrac{9t^8}{\theta^9}t\,\mathrm{d}t=\dfrac{9}{10}\theta$，

由 $\theta=E(aT)=aE(T)=\dfrac{9}{10}a\theta$ 知 $a=\dfrac{10}{9}$.