2016 年全国硕士研究生招生考试

数　学　（一）

（科目代码：301）

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

1．若反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}\mathrm{d}x$ 收敛，则

A．$a<1$ 且 $b>1$．　　B．$a>1$ 且 $b>1$．

C．$a<1$ 且 $a+b>1$．　　D．$a>1$ 且 $a+b>1$．

2．已知函数 $f(x)=\begin{cases}2(x-1), & x<1,\\ \ln x, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 的一个原函数是

A．$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1), & x\geqslant 1.\end{cases}$　　B．$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x+1)-1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

C．$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x+1)+1, & x\geqslant 1.\end{cases}$　　D．$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1)+1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

3．若 $y=(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}$，$y=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个解，则 $q(x)=$

A．$3x(1+x^2)$．　　B．$-3x(1+x^2)$．　　C．$\frac{x}{1+x^2}$．　　D．$-\frac{x}{1+x^2}$．

4．已知函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0,\\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1}<x\leqslant\frac{1}{n}, n=1,2,\cdots,\end{cases}$ 则

A．$x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点．　　B．$x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点．

C．$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导．　　D．$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导．

5．设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则下列结论错误的是

A．$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似．　　B．$\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似．

C．$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似．　　D．$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似．

6. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$，则 $f(x_1,x_2,x_3)=2$ 在空间直角坐标下表示的二次曲面为

A. 单叶双曲面.　　B. 双叶双曲面.　　C. 椭球面.　　D. 柱面.

7. 设随机变量 $X \sim N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$，记 $p=P\{X\leqslant\mu+\sigma^2\}$，则

A. p 随着 μ 的增加而增加.　　B. p 随着 σ 的增加而增加.

C. p 随着 μ 的增加而减少.　　D. p 随着 σ 的增加而减少.

8. 随机试验 E 有三种两两不相容的结果 A_1,A_2,A_3，且三种结果发生的概率均为 $\frac{1}{3}$. 将试验 E 独立重复做 2 次，X 表示 2 次试验中结果 A_1 发生的次数，Y 表示 2 次试验中结果 A_2 发生的次数，则 X 与 Y 的相关系数为

A. $-\frac{1}{2}$.　　B. $-\frac{1}{3}$.　　C. $\frac{1}{3}$.　　D. $\frac{1}{2}$.

二、填空题：9 ～ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\mathrm{d}t}{1-\cos x^2}=$ ________ .

10. 向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=(x+y+z)\boldsymbol{i}+xy\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 的旋度 $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=$ ________.

11. 设函数 $f(u,v)$ 可微，$z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 确定，则 $\mathrm{d}z|_{(0,1)}=$ ________.

12. 设函数 $f(x)=\arctan x-\dfrac{x}{1+ax^2}$，且 $f'''(0)=1$，则 $a=$ ________.

13. 行列式 $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}=$ ________.

14. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，样本均值 $\overline{x}=9.5$，参数 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间的置信上限为 10.8，则 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间为 ________.

三、解答题：15 ～ 23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本题满分 10 分）

已知平面区域 $D=\left\{(r,\theta)\ \middle|\ 2\leqslant r\leqslant 2(1+\cos\theta),-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

16.（本题满分 10 分）

设函数 $y(x)$ 满足方程 $y''+2y'+ky=0$，其中 $0<k<1$.

(1) 证明：反常积分 $\int_0^{+\infty} y(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

(2) 若 $y(0)=1, y'(0)=1$，求 $\int_0^{+\infty} y(x)\mathrm{d}x$ 的值.

17.（本题满分 10 分）

设函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)\mathrm{e}^{2x-y}$，且 $f(0,y)=y+1$，L_t 是从点 $(0,0)$ 到点 $(1,t)$ 的光滑曲线，计算曲线积分 $I(t)=\int_{L_t}\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}y$，并求 $I(t)$ 的最小值.

18.（本题满分 10 分）

设有界区域 Ω 由平面 $2x+y+2z=2$ 与三个坐标平面围成，Σ 为 Ω 整个表面的外侧，计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

19.（本题满分 10 分）

已知函数 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=1$，$0<f'(x)<\dfrac{1}{2}$，设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=f(x_n)$ $(n=1,2,\cdots)$，证明：

(1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，且 $0<\lim\limits_{n\to\infty}x_n<2$.

20.（本题满分 11 分）

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & a & 1\\ -1 & 1 & a\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & a\\ -a-1 & -2\end{pmatrix}$.

当 a 为何值时，方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 无解、有唯一解、有无穷多解？在有解时，求解此方程.

21.（本题满分 11 分）

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}^{99}$；

(2) 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 满足 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{BA}$，记 $\boldsymbol{B}^{100}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 分别表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合.

22.（本题满分 11 分）

设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y)\mid 0<x<1, x^2<y<\sqrt{x}\}$ 上服从均匀分布，令 $U=\begin{cases}1, & X\leqslant Y,\\ 0, & X>Y.\end{cases}$

(1) 写出 (X,Y) 的概率密度；

(2) 问 U 与 X 是否相互独立？并说明理由；

(3) 求 $Z=U+X$ 的分布函数 $F(z)$.

23.（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{\theta^3}, & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 $\theta\in(0,+\infty)$ 为未知参数，X_1,X_2,X_3 为来自总体 X 的简单随机样本，令

$$T=\max\{X_1,X_2,X_3\}.$$

(1) 求 T 的概率密度；

(2) 确定 a，使得 aT 为 θ 的无偏估计.

2016 年数学(一)答案解析

一、选择题

1.【答案】C

【解析】$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}dx=\int_0^1\frac{1}{x^a(1+x)^b}dx+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}dx=I_1+I_2$，

对于反常积分 I_1，$x=0$ 为瑕点，当 $0<a<1$ 时，由于 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^a}{x^a(1+x)^b}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{(1+x)^b}=1$，

故可知 I_1 收敛；当 $a\leqslant0$ 时，显然 I_1 收敛，故当 $a<1$ 时，反常积分 I_1 收敛.

对于反常积分 I_2，当 $a+b>1$ 时，由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{a+b}}{x^a(1+x)^b}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^b}{(1+x)^b}=1$，故可知 I_2 收敛.

因此，当 $a<1$ 且 $a+b>1$ 时，反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}dx$ 收敛.

2.【答案】D

【解析】当 $x<1$ 时，$F(x)=(x-1)^2+C_1$（C_1 为任意常数）；

当 $x\geqslant1$ 时，$F(x)=x(\ln x-1)+C_2$（C_2 为任意常数）.

函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续且 $f(1)=0$，即 $F(x)$ 在 $x=1$ 处导数存在，故

$$\lim_{x\to1^-}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=0,$$

由此可得 $C_1=C_2-1$，

观察选项可取 $C_1=0,C_2=1$，则 $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1)+1, & x\geqslant1.\end{cases}$

3.【答案】A

【解析】根据线性微分方程解的结构可知，两个解之差 $y=2\sqrt{1+x^2}$ 是 $y'+p(x)y=0$ 的解，由此解得 $p(x)=-\frac{x}{1+x^2}$.

由题 $y=(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}$ 为 $y'-\frac{x}{1+x^2}y=q(x)$ 的一个解，将其代入该方程中，解得 $q(x)=3x(1+x^2)$.

4.【答案】D

【解析】$f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$，因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}$，

因为$\dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}<\dfrac{f(x)}{x}<\dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}=1$，所以$f'_+(0)=1$，

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{x}=1=f'_+(0)$，所以$f(x)$在$x=0$处可导.

5.【答案】C

【解析】$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则存在可逆矩阵使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

两边同时取逆得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}^{-1}$，因此 $\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$，

从而 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$ 两边同时取转置得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，显然 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似，但 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 不相似.

6.【答案】B

【解析】二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，

$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda+1)^2(\lambda-5)=0$，故其特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=5$，

由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，故存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&5\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，得二次型的标准形为 $f(x_1,x_2,x_3)=-y_1^2-y_2^2+5y_3^2$，

故 $f(x_1,x_2,x_3)=2$，即 $-y_1^2-y_2^2+5y_3^2=2$ 为双叶双曲面.

7.【答案】B

【解析】由 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 可得 $\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$.

令 $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$，$\Phi(x)$ 是关于 x 的单调增函数.

而 $p=P\{X\leqslant\mu+\sigma^2\}=P\left\{\dfrac{X-\mu}{\sigma}\leqslant\sigma\right\}=\Phi(\sigma)$，因此 p 随着 σ 的增加而增加.

8.【答案】A

【解析】由题意可得 $X\sim B\left(2,\dfrac{1}{3}\right)$，$Y\sim B\left(2,\dfrac{1}{3}\right)$，则 $E(X)=E(Y)=\dfrac{2}{3}$，$D(X)=D(Y)=\dfrac{4}{9}$.

XY 的取值只有 $0,1$，且 $P\{XY=1\}=P\{X=1,Y=1\}=\dfrac{2}{9}$，

$P\{XY=0\}=1-P\{XY=1\}=\dfrac{7}{9}$，故 $E(XY)=1\cdot P\{XY=1\}=\dfrac{2}{9}$，

从而 $\operatorname{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-\dfrac{2}{9}$，$\rho_{XY}=\dfrac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=-\dfrac{1}{2}$.

二、填空题

9.【答案】$\dfrac{1}{2}$

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\mathrm{d}t}{1-\cos x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x\sin x)}{2x\sin x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{2x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{1}{2}$.

10.【答案】$\boldsymbol{j}+(y-1)\boldsymbol{k}$

【解析】$\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x+y+z & xy & z\end{vmatrix}=\boldsymbol{j}+(y-1)\boldsymbol{k}$.

11.【答案】$-\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y$

【解析】将 $x=0,y=1$ 代入题中所给方程，得 $z=1$.

方程两边同时对 x 求偏导，得 $z+(x+1)z_x=2xf(u,v)+x^2f_1'(1-z_x)$，

将点 $(0,1,1)$ 代入其中得 $z_x|_{(0,1)}=-1$；

方程两边同时对 y 求偏导，得 $(x+1)z_y-2y=x^2[f_1'(-z_y)+f_2']$，

将点 $(0,1,1)$ 代入其中得 $z_y|_{(0,1)}=2$，

因此，$\mathrm{d}z|_{(0,1)}=-\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y$.

12.【答案】$\dfrac{1}{2}$

【解析】$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1-ax^2}{(1+ax^2)^2}$，$f''(x)=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}-\dfrac{2a^2x^3-6ax}{(1+ax^2)^3}$，

$$f'''(x)=\frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}+\frac{(6a-6a^2x^2)(1+ax^2)-6ax(6ax-2a^2x^3)}{(1+ax^2)^4}.$$

因此，$f'''(0)=-2+6a=1$，从而得 $a=\dfrac{1}{2}$.

13.【答案】$\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4$

【解析】按第 1 列展开

$$\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda^3+\lambda^2+2\lambda+3)+4=\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4.$$

14.【答案】$(8.2,10.8)$

【解析】由题意可得 $P\left\{-u_{0.025}\leqslant\dfrac{\overline{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\leqslant u_{0.025}\right\}=0.95$，即

$$P\left\{\overline{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{0.025}\leqslant\mu\leqslant\overline{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{0.025}\right\}=0.95,$$

而 $\overline{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{0.025}=10.8$，得 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{0.025}=1.3$，故置信下限为 $\overline{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{0.025}=8.2$.

因此，参数 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间为(8.2，10.8).

三、解答题

15.【解析】$\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_2^{2(1+\cos\theta)}r^2\cos\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[(1+\cos\theta)^3-1]\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$

$$=\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^4\theta+3\cos^3\theta+3\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^4\theta+3\cos^3\theta+3\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta=\frac{16}{3}(I_1+3I_2+3I_3),$$

其中，

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{3}{16}\pi;$$

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{2}{3};$$

$$I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

故原式 $=\frac{16}{3}(I_1+3I_2+3I_3)=5\pi+\frac{32}{3}$.

16.(1)【证明】由特征方程 $\lambda^2+2\lambda+k=0$ 知，特征根 $\lambda_1=\sqrt{1-k}-1$，$\lambda_2=-\sqrt{1-k}-1$，因为 $0<k<1$，所以 $\lambda_1<0$，$\lambda_2<0$. 方程通解为

$$y(x)=C_1\mathrm{e}^{(\sqrt{1-k}-1)x}+C_2\mathrm{e}^{(-\sqrt{1-k}-1)x}\ (C_1,C_2\text{ 为任意常数}).$$

故 $\int_0^{+\infty}y(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{C_1}{\sqrt{1-k}-1}+\frac{C_2}{\sqrt{1-k}+1}$，因此该积分收敛.

(2)【解析】由 $y(0)=1$，$y'(0)=1$ 可知

$$\begin{cases}C_1+C_2=1,\\C_1(\sqrt{1-k}-1)+C_2(-\sqrt{1-k}-1)=1,\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}C_1=\dfrac{1}{\sqrt{1-k}}+\dfrac{1}{2},\\C_2=-\dfrac{1}{\sqrt{1-k}}+\dfrac{1}{2},\end{cases}$

故 $\int_0^{+\infty}y(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{C_1}{\sqrt{1-k}-1}+\frac{C_2}{\sqrt{1-k}+1}=\frac{3}{k}$.

17.【解析】由题知 $f(x,y)=\int(2x+1)e^{2x-y}dx=xe^{2x-y}+\varphi(y)$，

由 $f(0,y)=y+1$ 得，$\varphi(y)=y+1$. 故

$$f(x,y)=xe^{2x-y}+y+1,\frac{\partial f}{\partial y}=-xe^{2x-y}+1.$$

令 $\frac{\partial f}{\partial x}=P,\frac{\partial f}{\partial y}=Q$，因为 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，所以曲线积分与路径无关，

令 L_1 为 $(0,0)\to(1,0)$ 的直线，L_2 为 $(1,0)\to(1,t)$ 的直线，则

$$\begin{aligned}I(t)&=\int_{L_1}\frac{\partial f}{\partial x}dx+\int_{L_2}\frac{\partial f}{\partial y}dy\\&=\int_0^1(2x+1)e^{2x}dx+\int_0^t(1-e^{2-y})dy=e^{2-t}+t,\end{aligned}$$

令 $I'(t)=-e^{2-t}+1=0$，解得 $t=2$.

当 $t>2$ 时，$I'(t)>0$；当 $t<2$ 时，$I'(t)<0$，故 $I(t)$ 的最小值为 $I(2)=2+1=3$.

18.【解析】由高斯公式得

$$I=\iiint_{\Omega}(2x-2+3)dv=\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{2-2x-2z}2x\,dy\,dz\,dx+\iiint_{\Omega}dv$$

$$=\int_0^1\int_0^{1-x}2x(2-2x-2z)dz\,dx+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times1\times1=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}.$$

19.【证明】(1) 当 $n\geqslant2$ 时，有

$|x_{n+1}-x_n|=|f(x_n)-f(x_{n-1})|=|f'(\xi)(x_n-x_{n-1})|$，其中 ξ 介于 x_{n-1} 与 x_n 之间.

因为 $0<f'(x)<\frac{1}{2}$，所以 $|x_{n+1}-x_n|\leqslant\frac{1}{2}|x_n-x_{n-1}|$，从而 $|x_{n+1}-x_n|\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}|x_2-x_1|$.

因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}|x_2-x_1|$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}|x_{n+1}-x_n|$ 收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛.

(2) 由 (1) 可知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 收敛，因此 $x_n=\sum_{k=2}^{n}(x_k-x_{k-1})+x_1$，故 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在，

不妨设为 A，则有 $A=f(A)$.

由中值定理知，存在 $\xi\in(0,A)$，使

$$0<f'(\xi)=\frac{f(A)-f(0)}{A-0}=\frac{A-1}{A}=1-\frac{1}{A}<\frac{1}{2},$$

故 $0<A<2$，即 $0<\lim_{n\to\infty}x_n<2$.

20.【解析】

$$(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc:cc}1&-1&-1&2&2\\2&a&1&1&a\\-1&1&a&-a-1&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1&-1&-1&2&2\\0&a+2&3&-3&a-4\\0&0&a-1&-a+1&0\end{array}\right).$$

(1) 当 $a-1=0$，即 $a=1$ 时，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B})=2<3$，方程有无穷多解，

$$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B})\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:cc}1&-1&-1&2&2\\0&3&3&-3&-3\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&0&1&1\\0&1&1&-1&-1\\0&0&0&0&0\end{array}\right),$$

故可得通解为 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&1\\-1-k_1&-1-k_2\\k_1&k_2\end{pmatrix}$ (k_1,k_2 为任意常数).

(2) 当 $a+2=0$，即 $a=-2$ 时，$r(\boldsymbol{A})=2\neq3=r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B})$，方程无解.

(3) 当 $a\neq1$ 且 $a\neq-2$ 时，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B})=3$，方程有唯一解，

$$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B})\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:cc}1&-1&-1&2&2\\0&a+2&3&-3&a-4\\0&0&a-1&-a+1&0\end{array}\right)\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:cc}1&0&0&1&\dfrac{3a}{a+2}\\0&1&0&0&\dfrac{a-4}{a+2}\\0&0&1&-1&0\end{array}\right],$$

解得 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&\dfrac{3a}{a+2}\\0&\dfrac{a-4}{a+2}\\-1&0\end{bmatrix}$.

21.【解析】(1) 由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-1\\-2&\lambda+3&0\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+2)(\lambda+1)=0$ 可知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$\lambda_1=0,\lambda_2=-1,\lambda_3=-2$. 将 $\boldsymbol{A}$ 对角化，

当 $\lambda_1=0$ 时，由 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 得特征向量 $\boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_2=-1$ 时，由 $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 得特征向量 $\boldsymbol{X}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_3=-2$ 时，由 $(-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 得特征向量 $\boldsymbol{X}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\2&0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$，因此

$$P^{-1}A^{99}P=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&(-1)^{99}&0\\0&0&(-2)^{99}\end{pmatrix},$$

所以有 $A^{99}=P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&(-1)^{99}&0\\0&0&(-2)^{99}\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}2^{99}-2&1-2^{99}&2-2^{98}\\2^{100}-2&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}$.

(2) $B^{100}=B^{98}B^2=B^{98}BA=\cdots=BA^{99}$,

故 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)A^{99}$. 因此有

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=(2^{99}-2)\boldsymbol{\alpha}_1+(2^{100}-2)\boldsymbol{\alpha}_2,\\ \boldsymbol{\beta}_2=(1-2^{99})\boldsymbol{\alpha}_1+(1-2^{100})\boldsymbol{\alpha}_2,\\ \boldsymbol{\beta}_3=(2-2^{98})\boldsymbol{\alpha}_1+(2-2^{99})\boldsymbol{\alpha}_2.\end{cases}$$

22.【解析】(1) 区域 D 的面积为

$$S_D=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\,\mathrm{d}x=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right)\bigg|_0^1=\frac{1}{3},$$

故 (X,Y) 的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}3, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) 设 U 和 X 的联合分布函数为 $G(u,x)$,

$$G(0,t)=P\{U=0,X\leqslant t\}=P\{X>Y,X\leqslant t\}=\int_0^t\int_{x^2}^{x}f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\frac{3}{2}t^2-t^3;$$

$$G(1,t)=P\{U=1,X\leqslant t\}=2t^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}t^2.$$

由于

$$P\{U=0\}=P\{X>Y\}=\int_0^1\int_{x^2}^{x}f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}=P\{U=1\},$$

显然

$$G(u,x)\neq P\{U=u\}P\{X\leqslant x\},$$

故 U 与 X 不独立.

(3) 当 $z<0$ 时, $F(z)=0$;

当 $0\leqslant z<1$ 时, $F(z)=P\{U=0,X\leqslant z\}=\dfrac{3}{2}z^2-z^3$;

当 $1\leqslant z<2$ 时,
$$\begin{aligned}F(z)&=P\{U=1,X\leqslant z-1\}+P\{U=0,X\leqslant z\}\\&=2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(z-1)^2+\frac{1}{2};\end{aligned}$$

当 $z\geqslant 2$ 时, $F(z)=1$.

故
$$F(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \dfrac{3}{2}z^2-z^3, & 0\leqslant z<1,\\ 2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{3}{2}(z-1)^2+\dfrac{1}{2}, & 1\leqslant z<2,\\ 1, & z\geqslant 2.\end{cases}$$

23.【解析】(1) 当 $0<x\leqslant\theta$ 时，X 的分布函数为
$$F(x)=\int_0^x\frac{3t^2}{\theta^3}\mathrm{d}t=\frac{x^3}{\theta^3}.$$
故
$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{x^3}{\theta^3}, & 0<x\leqslant\theta,\\ 1, & x>\theta.\end{cases}$$
设 T 的分布函数为 $G(t)$，则当 $0<t\leqslant\theta$ 时，
$$G(t)=P\{T\leqslant t\}=P\{X_1\leqslant t,X_2\leqslant t,X_3\leqslant t\}$$
$$=P\{X_1\leqslant t\}P\{X_2\leqslant t\}P\{X_3\leqslant t\}=\frac{t^9}{\theta^9},$$
故
$$G(t)=\begin{cases}0, & t\leqslant 0,\\ \dfrac{t^9}{\theta^9}, & 0<t\leqslant\theta,\\ 1, & t>\theta,\end{cases}$$
因此 T 的密度函数为
$$g(t)=\begin{cases}\dfrac{9t^8}{\theta^9}, & 0<t<\theta,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$
(2)$E(T)=\int_0^\theta\dfrac{9t^8}{\theta^9}t\,\mathrm{d}t=\dfrac{9}{10}\theta$，

由 $\theta=E(aT)=aE(T)=\dfrac{9}{10}a\theta$ 知 $a=\dfrac{10}{9}$，此时 aT 为 θ 的无偏估计.