2015 年全国硕士研究生招生考试

数　学　（二）

（科目代码:302）

一、选择题:1 ～ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

1. 下列反常积分中收敛的是

A. $\int_2^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.　　B. $\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$.

C. $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$.　　D. $\int_2^{+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$.

2. 函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}\left(1+\frac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}}$ 在$(-\infty,+\infty)$内

A. 连续.　　B. 有可去间断点.

C. 有跳跃间断点.　　D. 有无穷间断点.

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\cos\frac{1}{x^{\beta}}, & x>0, \\ 0, & x\leqslant 0 \end{cases}$ $(\alpha>0,\beta>0)$,若 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续,则

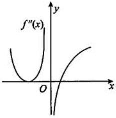
A. $\alpha-\beta>1$.　　B. $0<\alpha-\beta\leqslant 1$.

C. $\alpha-\beta>2$.　　D. $0<\alpha-\beta\leqslant 2$.

4. 设函数 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续,其二阶导数 $f''(x)$ 的图形如右图所示,则曲线 $y=f(x)$ 的拐点个数为

A. 0.　　B. 1.

C. 2.　　D. 3.



4 题图

5. 设函数 $f(u,v)$ 满足 $f\left(x+y,\frac{y}{x}\right)=x^2-y^2$,则 $\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}$ 与 $\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}$ 依次是

A. $\frac{1}{2}$,0.　　B. 0,$\frac{1}{2}$.

C. $-\frac{1}{2}$,0.　　D. 0,$-\frac{1}{2}$.

6. 设 D 是第一象限中由曲线 $2xy=1, 4xy=1$ 与直线 $y=x, y=\sqrt{3}x$ 围成的平面区域，函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$

A. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r$.

B. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r$.

C. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\mathrm{d}r$.

D. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\mathrm{d}r$.

7. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\d\\d^2\end{pmatrix}$，若集合 $\Omega=\{1,2\}$，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充分必要条件为

A. $a\notin\Omega, d\notin\Omega$.

B. $a\notin\Omega, d\in\Omega$.

C. $a\in\Omega, d\notin\Omega$.

D. $a\in\Omega, d\in\Omega$.

8. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$，若 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)$，则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为

A. $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$.

B. $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

C. $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

D. $2y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

二、填空题：9 ～ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

9. $\begin{cases}x=\arctan t,\\ y=3t+t^3,\end{cases}$ 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}=$ ________.

10. 函数 $f(x)=x^2\cdot 2^x$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)=$ ________.

11. 设函数 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)=\int_0^{x^2} xf(t)\mathrm{d}t$，若 $\varphi(1)=1, \varphi'(1)=5$，则 $f(1)=$ ________.

12. 若函数 $y=y(x)$ 是微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的解，且在 $x=0$ 处 $y(x)$ 取得极值 3，则 $y(x)=$ ________.

13. 若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\mathrm{e}^{x+2y+3z}+xyz=1$ 确定，则 $\mathrm{d}z|_{(0,0)}=$ ________.

14. 若 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,-2,1$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵，则行列式 $|\boldsymbol{B}|=$ ________.

三、解答题：15 ～ 23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x, g(x)=kx^3$，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 时是等价无穷小，求 a,b,k 的值.

16.（本题满分 10 分）

设 $A>0$，D 是由曲线段 $y=A\sin x\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 及直线 $y=0$，$x=\frac{\pi}{2}$ 所围成的平面区域，V_1，V_2 分别表示 D 绕 x 轴与绕 y 轴旋转所成旋转体的体积，若 $V_1=V_2$，求 A 的值.

17.（本题满分 10 分）

已知函数 $f(x,y)$ 满足 $f''_{xy}(x,y)=2(y+1)\mathrm{e}^x$，$f'_x(x,0)=(x+1)\mathrm{e}^x$，$f(0,y)=y^2+2y$，求 $f(x,y)$ 的极值.

18.（本题满分 10 分）

计算二重积分 $\iint\limits_D x(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2, y\geqslant x^2\}$.

19.（本题满分 10 分）

已知函数 $f(x)=\int_x^1\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t+\int_1^{x^2}\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t$，求 $f(x)$ 零点的个数.

20.（本题满分 11 分）

已知高温物体置于低温介质中，任一时刻该物体温度对时间的变化率与该时刻物体和介质的温差成正比. 现将一初始温度为 120℃ 的物体在 20℃ 的恒温介质中冷却，30 min 后该物体温度降至 30℃，若要将该物体的温度继续降至 21℃，还需冷却多长时间？

21.（本题满分 11 分）

已知函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上具有二阶导数，$f(a)=0$，$f'(x)>0$，$f''(x)>0$.

设 $b>a$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(b,f(b))$ 处的切线与 x 轴的交点是 $(x_0,0)$，证明：$a<x_0<b$.

22.（本题满分 11 分）

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$.

（1）求 a 的值；

（2）若矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵，求 $\boldsymbol{X}$.

23.（本题满分 11 分）

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

（1）求 a,b 的值；

（2）求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

2015 年数学(二)答案解析

一、选择题

1.【答案】D

【解析】当 $p>1$ 时,反常积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛,因此选项 A,B,C 中的反常积分是发散的.

又$\int_2^{+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=-x\mathrm{e}^{-x}\Big|_2^{+\infty}+\int_2^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=2\mathrm{e}^{-2}+\mathrm{e}^{-2}=3\mathrm{e}^{-2}$,因此,反常积分$\int_2^{+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$ 收敛.

2.【答案】B

【解析】当 $x\neq 0$ 时,$f(x)=\lim\limits_{t\to 0}\left(1+\frac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}}=\lim\limits_{t\to 0}\left(1+\frac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x}{\sin t}\cdot\frac{\sin t}{x}\cdot\frac{x^2}{t}}=\mathrm{e}^x$,

显然函数 $f(x)$ 在$x=0$ 处没有定义,因此 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的可去间断点.

3.【答案】A

【解析】当 $x\neq 0$ 时,$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^\beta}+\beta x^{\alpha-\beta-1}\sin\frac{1}{x^\beta}$,

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^\alpha\cos\frac{1}{x^\beta}}{x}=\lim_{x\to 0^+}x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^\beta},f'_-(0)=0.$$

要使 $f'(0)$ 存在,则需 $\alpha>1$,此时 $f'(0)=0$.

若 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续,则 $\alpha-\beta-1>0$,即 $\alpha-\beta>1$.

4.【答案】C

【解析】由图可知,有两个点满足 $f''(x)=0$,设这两个点为 x_1,x_2(从左到右).

但在 $x=x_1$ 的左右两侧都有 $f''(x)>0$,因此 $x=x_1$ 不是函数 $f(x)$ 的拐点;

而在 $x=x_2$ 的左右两侧,$f''(x)$ 异号,因此 $x=x_2$ 是函数 $f(x)$ 的拐点;

值得注意的是,$x=0$ 也是函数 $f(x)$ 的拐点,虽然 $f''(x)$ 在 $x=0$ 处不存在,但其左右两侧 $f''(x)$ 也异号.因此,函数 $f(x)$ 有两个拐点.

5.【答案】D

【解析】令 $u=x+y,v=\frac{y}{x}$,则 $x=\frac{u}{v+1},y=\frac{uv}{v+1}$,那么 $f(u,v)=\frac{u^2(1-v^2)}{(v+1)^2}=\frac{u^2(1-v)}{v+1}$.

则$\frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{\substack{u=1\\v=1}}=\frac{2u(1-v)}{v+1}\Big|_{\substack{u=1\\v=1}}=0$, $\frac{\partial f}{\partial v}\Big|_{\substack{u=1\\v=1}}=\frac{-2u^2}{(v+1)^2}\Big|_{\substack{u=1\\v=1}}=-\frac{1}{2}$.

6.【答案】B

【解析】令 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$,

$$\text{由}\begin{cases}\frac{1}{4x}\leqslant y\leqslant\frac{1}{2x},\\ \frac{\sqrt{3}}{3}y\leqslant x\leqslant y,\end{cases}\text{可得}\begin{cases}\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3},\\ \frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}\leqslant r\leqslant\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}},\end{cases}$$

因此 $$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r.$$

7.【答案】D

【解析】线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充分必要条件为 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<3$.

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\1&2&a&d\\1&4&a^2&d^2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&1&a-1&d-1\\0&0&a^2-1-3(a-1)&d^2-1-3(d-1)\end{array}\right),$$

若 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<3$,则 $a^2-1-3(a-1)=0,d^2-1-3(d-1)=0$,

求得 $a=1$ 或 $2,d=1$ 或 2,即 $a\in\Omega,d\in\Omega$.

8.【答案】A

【解析】设 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$,则由题意可得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

而 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$,那么 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,

因此,在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为 $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$.

二、填空题

9.【答案】48

【解析】$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{3+3t^2}{\frac{1}{1+t^2}}=3(1+t^2)^2$,$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{6(1+t^2)\cdot 2t}{\frac{1}{1+t^2}}=12t(1+t^2)^2$,

因此$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}=48$.

10.【答案】$(\ln 2)^{n-2}n(n-1)$

【解析】2^x 在 $x=0$ 处的泰勒展开为 $2^x=\mathrm{e}^{x\ln 2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x\ln 2)^n}{n!}$,

那么 $x^2\cdot 2^x$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开为 $x^2\cdot 2^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{n+2}(\ln 2)^n}{n!}$,

因此$\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}=\dfrac{(\ln 2)^{n-2}}{(n-2)!}$,则 $f^{(n)}(0)=(\ln 2)^{n-2}n(n-1)$.

11.【答案】2

【解析】$\varphi'(x)=\int_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t+2x^2f(x^2)$,则 $\varphi'(1)=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t+2f(1)=5$.

而 $\varphi(1)=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=1$,因此 $f(1)=2$.

12.【答案】$2e^{x}+e^{-2x}$

【解析】微分方程的特征方程为 $\lambda^2+\lambda-2=0$，则特征根为 $\lambda_1=1,\lambda_2=-2$，

那么该微分方程的通解为 $y=C_1e^{x}+C_2e^{-2x}$ (C_1,C_2 为任意常数).

由 $y(0)=3,y'(0)=0$，可得 $C_1=2,C_2=1$，

因此 $y(x)=2e^{x}+e^{-2x}$.

13.【答案】$-\frac{1}{3}dx-\frac{2}{3}dy$

【解析】将 $x=0,y=0$ 代入原方程得 $z=0$.

原方程两边同时对 x 求导得 $e^{x+2y+3z}(1+3z_x)+yz+xyz_x=0$，

将(0,0,0)代入得 $z_x|_{(0,0,0)}=-\frac{1}{3}$；

原方程两边同时对 y 求导得 $e^{x+2y+3z}(2+3z_y)+xz+xyz_y=0$，

将(0,0,0)代入得 $z_y|_{(0,0,0)}=-\frac{2}{3}$.

因此，$dz|_{(0,0)}=-\frac{1}{3}dx-\frac{2}{3}dy$.

14.【答案】21

【解析】由 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$，可得 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 3,7,1，则 $|\boldsymbol{B}|=21$.

三、解答题

15.【解析】由泰勒展开可知，

$$1=\lim_{x\to0}\frac{x+a\ln(1+x)+bx\sin x}{kx^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x+a\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)+bx(x+o(x))}{kx^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1+a)x+\left(b-\frac{a}{2}\right)x^2+\frac{a}{3}x^3+o(x^3)}{kx^3},$$

故 $a=-1,b=-\frac{1}{2},k=-\frac{1}{3}$.

16.【解析】$V_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi(A\sin x)^2dx=\pi A^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{4}\pi^2A^2$；

$$V_2=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cdot A\sin x\,dx=2\pi A\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx=2\pi A.$$

由 $V_1=V_2$ 可知 $A=\frac{8}{\pi}$.

17.【解析】$f'_x=\int 2(y+1)e^{x}dy=(y+1)^2e^{x}+C_1(x)$，

由 $f'_x(x,0)=(x+1)e^{x}$ 知 $C_1(x)=xe^{x}$，因此有

$$f'_x=(y+1)^2e^{x}+xe^{x}.$$

故 $$f(x,y)=\int[(y+1)^2e^x+xe^x]\,dx=(y+1)^2e^x+xe^x-e^x+C_2(y),$$

由 $f(0,y)=y^2+2y$ 知 $C_2(y)=0$,因此

$$f(x,y)=(y+1)^2e^x+(x-1)e^x.$$

由 $\begin{cases}0=f'_x=(y+1)^2e^x+xe^x,\\0=f'_y=2(y+1)e^x,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0,\\y=-1.\end{cases}$ 且

$$\begin{cases}A=f''_{xx}(0,-1)=[(y+1)^2e^x+(x+1)e^x]\big|_{(0,-1)}=1,\\B=f''_{xy}(0,-1)=2(y+1)e^x\big|_{(0,-1)}=0,\\C=f''_{yy}(0,-1)=2e^x\big|_{(0,-1)}=2,\end{cases}$$

由于 $AC-B^2>0,A>0$,故 $f(x,y)$ 的极小值为 $f(0,-1)=-1$.

18.【解析】由对称性可知,

$$\iint_D x(x+y)\,dx\,dy=\iint_D x^2\,dx\,dy=2\int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}}x^2\,dy\,dx$$

$$=2\int_0^1 x^2(\sqrt{2-x^2}-x^2)\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\sin^2t\cdot\sqrt{2}\cos t\,d(\sqrt{2}\sin t)-\frac{2}{5}$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 2t\,dt-\frac{2}{5}=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos 4t}{2}\,dt-\frac{2}{5}$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{5}.$$

19.【解析】$f'(x)=-\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x^2}\cdot 2x=(2x-1)\sqrt{1+x^2}$,

令 $f'(x)=0$,解得 $x=\frac{1}{2}$,当 $x>\frac{1}{2}$ 时,$f'(x)>0$;当 $x<\frac{1}{2}$ 时,$f'(x)<0$.

故 $f(x)$ 的极小值为

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\int_{\frac{1}{2}}^1\sqrt{1+t^2}\,dt-\int_{\frac{1}{4}}^1\sqrt{1+t}\,dt=\int_{\frac{1}{4}}^1\sqrt{1+t}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt-\int_{\frac{1}{4}}^1\sqrt{1+t}\,dt<0.$$

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)>0$,$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)>0$,

所以 $f(x)$ 有两个零点,分别在区间 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 内.

20.【解析】记时间为 t,温度为 $T(t)$. 由题可知,

$$\frac{dT}{dt}=k(T-20),$$

故解得 $$T(t)=Ce^{kt}+20.$$

由题知 $\begin{cases}T(0)=120,\\T(30)=30,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}C=100,\\k=-\frac{\ln 10}{30},\end{cases}$

故 $$T(t)=100e^{-\frac{\ln 10}{30}t}+20.$$

不妨设降至 21℃ 还需 t 分钟,则有 $21=100\mathrm{e}^{-\frac{\ln 10}{30}(t+30)}+20$,解得 $t=30$,

即还需冷却 30 分钟.

21.【证明】曲线 $y=f(x)$ 在点 $(b,f(b))$ 处的切线为

$$y-f(b)=f'(b)(x-b),$$

故 $x_0=b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}$,由于 $f'(x)>0$,故 $x_0<b$.

由拉格朗日中值定理知,存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>0,$$

因此 $f(b)<f'(b)(b-a)$,故

$$a<b-\frac{f(b)}{f'(b)}=x_0.$$

综上知 $a<x_0<b$.

22.【解析】(1) 因为 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$,故 $|\boldsymbol{A}|=0$. 由 $0=|\boldsymbol{A}|=a^3+a-a=a^3$,得 $a=0$.

(2) 矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足

$$\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$$

$$\Rightarrow(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}-(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E},$$

故 $$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2)=\boldsymbol{E}.$$

因此有 $$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2)^{-1}.$$

由题意可知

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix},\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&2\end{pmatrix},$$

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2\mid\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}0&0&1&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\-1&0&2&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&2&0&-1\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&1&0&0\end{array}\right).\text{故}$$

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2)^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

同理求得 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&1&-1\\1&1&0\end{pmatrix}$. 故

$$X=(E-A)^{-1}(E-A^2)^{-1}=\begin{pmatrix}3&1&-2\\1&1&-1\\2&1&-1\end{pmatrix}.$$

23.【解析】(1)$A\sim B$,故 $\operatorname{tr}A=\operatorname{tr}B$,$|A|=|B|$.

即$\begin{cases}3+a=b+2,\\-6-6+9+2a=b,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=4,\\b=5.\end{cases}$

(2) 由 $0=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-2&3\\1&\lambda-3&3\\-1&2&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-5)$,

知 A 的特征值为 $\lambda=1,1,5$.

当 $\lambda=1$ 时,由 $(E-A)X=0$ 解得对应的线性无关的特征向量为 $X_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$,$X_2=\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$;

当 $\lambda=5$ 时,由 $(5E-A)X=0$ 解得对应的特征向量为 $X_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

令 $P=\begin{pmatrix}2&-3&-1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$,则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{pmatrix}$.