2015 年全国硕士研究生招生考试

数　学　(三)

(科目代码:303)

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

1. 设$\{x_n\}$是数列,下列命题中不正确的是

A. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$.

B. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

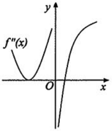
C. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$.

D. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,其二阶导数 $f''(x)$ 的图形如图所示,则曲线 $y=f(x)$ 的拐点的个数为

A. 0.　　　　B. 1.

C. 2.　　　　D. 3.



2 题图

3. 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2x, x^2+y^2\leqslant 2y\}$,函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续,则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$

A. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$.

B. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$.

C. $2\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{x}f(x,y)\mathrm{d}y$.

D. $2\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x}^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$.

4. 下列级数中发散的是

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$.　　　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

C. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{\ln n}$.　　　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.

5. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\d\\d^2\end{pmatrix}$，若集合 $\Omega=\{1,2\}$，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充分必要条件为

A. $a\notin\Omega,d\notin\Omega$.　　B. $a\notin\Omega,d\in\Omega$.

C. $a\in\Omega,d\notin\Omega$.　　D. $a\in\Omega,d\in\Omega$.

6. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$，若 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)$，则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为

A. $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$.　　B. $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

C. $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$.　　D. $2y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

7. 若 A,B 为任意两个随机事件，则

A. $P(AB)\leqslant P(A)P(B)$.　　B. $P(AB)\geqslant P(A)P(B)$.

C. $P(AB)\leqslant\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$.　　D. $P(AB)\geqslant\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$.

8. 设总体 $X\sim B(m,\theta)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自该总体的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，则 $E\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]=$

A. $(m-1)n\theta(1-\theta)$.　　B. $m(n-1)\theta(1-\theta)$.

C. $(m-1)(n-1)\theta(1-\theta)$.　　D. $mn\theta(1-\theta)$.

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}=$________.

10. 设函数 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)=\int_0^{x^2}xf(t)\mathrm{d}t$，若 $\varphi(1)=1,\varphi'(1)=5$，则 $f(1)=$________.

11. 若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\mathrm{e}^{x+2y+3z}+xyz=1$ 确定，则 $\mathrm{d}z|_{(0,0)}=$________.

12. 设函数 $y=y(x)$ 是微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的解，且在 $x=0$ 处取得极值 3，则 $y(x)=$________.

13. 若 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,-2,1$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵，则行列式 $|\boldsymbol{B}|=$________.

14. 设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(1,0;1,1;0)$，则 $P\{XY-Y<0\}=$________.

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$，$g(x)=kx^3$，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to0$ 时是等价无穷小，求 a,b,k 的值.

16.（本题满分 10 分）

计算二重积分$\iint\limits_D x(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2, y\geqslant x^2\}$.

17.（本题满分 10 分）

为了实现利润最大化，厂商需要对某商品确定其定价模型. 设 Q 为该商品的需求量，P 为价格，MC 为边际成本，η 为需求弹性 $(\eta>0)$.

(1) 证明：定价模型为 $P=\dfrac{MC}{1-\dfrac{1}{\eta}}$；

(2) 若该商品的成本函数为 $C(Q)=1\,600+Q^2$，需求函数为 $Q=40-P$，试由(1)中的定价模型确定此商品的价格.

18.（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零，若对任意的 $x_0\in I$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线与直线 $x=x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4，且 $f(0)=2$，求 $f(x)$ 的表达式.

19.（本题满分 10 分）

(1) 设函数 $u(x)$，$v(x)$ 可导，利用导数定义证明：

$$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x);$$

(2) 设函数 $u_1(x),u_2(x),\cdots,u_n(x)$ 均可导，$f(x)=u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$，写出 $f(x)$ 的求导公式.

20.（本题满分 11 分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$，且 $A^3=O$，

（1）求 a 的值；

（2）若矩阵 X 满足 $X-XA^2-AX+AXA^2=E$，E 为 3 阶单位矩阵，求 X.

21.（本题满分 11 分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

（1）求 a,b 的值；

（2）求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

22.（本题满分 11 分）

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} 2^{-x}\ln 2, & x>0, \\ 0, & x\leqslant 0. \end{cases}$

对 X 进行独立重复的观测，直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止. 记 Y 为观测次数.

（1）求 Y 的概率分布；

（2）求 $E(Y)$.

23.（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases} \dfrac{1}{1-\theta}, & \theta\leqslant x\leqslant 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$

其中 θ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自该总体的简单随机样本.

（1）求 θ 的矩估计量；

（2）求 θ 的最大似然估计量.

2015 年数学(三)答案解析

一、选择题

1.【答案】D

【解析】数列$\{a_n\}$收敛于a的充要条件是$\{a_n\}$的所有子列都收敛于a.

而$\{x_n\}$的全部子列为$\{x_{3n}\}$,$\{x_{3n+1}\}$,$\{x_{3n+2}\}$,因此$\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$推不出$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

2.【答案】C

【解析】由图可知,有两个点满足$f''(x)=0$,设这两个点为x_1,x_2(从左到右),

在$x=x_1$的左右两侧都有$f''(x)>0$,因此$x=x_1$不是$f(x)$的拐点;

而在$x=x_2$的左右两侧$f''(x)$异号,因此$x=x_2$是函数$f(x)$的拐点.

值得注意的是,$x=0$也是$f(x)$的拐点,虽然$f''(x)$在$x=0$处不存在,但其左右两侧$f''(x)$也异号. 因此函数$f(x)$有两个拐点.

3.【答案】B

【解析】由于积分区域不是对称的,因此C,D选项排除.

令$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$,则极坐标系下的积分区域为:

$$D_1\cup D_2=\left\{(\theta,r)\middle|0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4},0\leqslant r\leqslant 2\sin\theta\right\}\cup\left\{(\theta,r)\middle|\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant r\leqslant 2\cos\theta\right\},$$

因此$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$.

4.【答案】C

【解析】$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{\ln n}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$,若右边两个级数同时收敛,则级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{\ln n}$收敛;若右边两个级数有一个发散,则级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{\ln n}$也发散.

显然,由莱布尼茨判别法可知级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$收敛;因为$\frac{1}{n}<\frac{1}{\ln n}$,所以由比较原则可得$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$发散,因此级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{\ln n}$发散.

5.【答案】D

【解析】线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有无穷多解的充分必要条件为$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<3$.

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&2&a&d\\1&4&a^2&d^2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&1&a-1&d-1\\0&0&(a-2)(a-1)&(d-2)(d-1)\end{array}\right),$$

若$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<3$,则$(a-2)(a-1)=0,(d-2)(d-1)=0$,

解得$a=1$或2,$d=1$或2,即$a\in\Omega,d\in\Omega$.

6.【答案】A

【解析】设 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，则由题意可得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

而 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$，那么 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，

因此，$f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$.

7.【答案】C

【解析】$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，因为 $P(A\cup B)\geqslant P(AB)$，

所以 $P(A)+P(B)\geqslant 2P(AB)$，即 $P(AB)\leqslant\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$.

8.【答案】B

【解析】样本方差 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，

则 $E(S^2)=D(X)=m\theta(1-\theta)$，

因此 $E\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]=(n-1)m\theta(1-\theta)$.

二、填空题

9.【答案】$-\dfrac{1}{2}$

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\cos x-1)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$.

10.【答案】2

【解析】$\varphi'(x)=\int_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t+2x^2f(x^2)$，则 $\varphi'(1)=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t+2f(1)=5$，

而 $\varphi(1)=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=1$，因此 $f(1)=2$.

11.【答案】$-\dfrac{1}{3}\mathrm{d}x-\dfrac{2}{3}\mathrm{d}y$

【解析】将 $x=0,y=0$ 代入原方程得 $z=0$.

原方程两边同时对 x 求导得 $\mathrm{e}^{x+2y+3z}(1+3z_x)+yz+xyz_x=0$，

将 $(0,0,0)$ 代入得 $z_x\big|_{(0,0,0)}=-\dfrac{1}{3}$.

原方程两边同时对 y 求导得 $\mathrm{e}^{x+2y+3z}(2+3z_y)+xz+xyz_y=0$，

将 $(0,0,0)$ 代入得 $z_y\big|_{(0,0,0)}=-\dfrac{2}{3}$.

因此，$dz|_{(0,0)}=-\frac{1}{3}dx-\frac{2}{3}dy$.

12.【答案】$2e^x+e^{-2x}$

【解析】微分方程的特征方程为 $\lambda^2+\lambda-2=0$，解得特征根为 $\lambda_1=1,\lambda_2=-2$，

则该微分方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}(C_1,C_2$ 为任意常数).

由 $y(0)=3,y'(0)=0$，可得 $C_1=2,C_2=1$.

因此，$y(x)=2e^x+e^{-2x}$.

13.【答案】21

【解析】由 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$，可得 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 3,7,1，则 $|\boldsymbol{B}|=21$.

14.【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】由题意可得，$X\sim N(1,1),Y\sim N(0,1),\mathrm{Cov}(X,Y)=0$，即 X,Y 独立.

则
$$\begin{aligned}P\{XY-Y<0\}&=P\{X>1,Y<0\}+P\{X<1,Y>0\}\\&=P\{X>1\}P\{Y<0\}+P\{X<1\}P\{Y>0\}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

三、解答题

15.【解析】由泰勒展开可知

$$\begin{aligned}1&=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x+a\ln(1+x)+bx\sin x}{kx^3}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x+a\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right]+bx\left[x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right]}{kx^3}\\&=\lim_{x\to0}\frac{(1+a)x+\left(b-\frac{a}{2}\right)x^2+\frac{a}{3}x^3+o(x^3)}{kx^3},\end{aligned}$$

故 $a=-1,b=-\frac{1}{2},k=\frac{a}{3}=-\frac{1}{3}$.

16.【解析】由对称性可知

$$\begin{aligned}\iint_D x(x+y)\,dx\,dy&=\iint_D x^2\,dx\,dy=\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}}x^2\,dy\,dx=\int_{-1}^{1}x^2(\sqrt{2-x^2}-x^2)\,dx\\&=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2t\cos t\,d(\sin t)-\frac{2}{5}=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 2t\,dt-\frac{2}{5}\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 4t)\,dt-\frac{2}{5}=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{5}.\end{aligned}$$

17.【解析】(1) 总收益 $R=PQ$，需求弹性

$$\eta=-\frac{dQ/dP}{Q/P},$$

若利润最大，则有

$$MC=\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}=\frac{\mathrm{d}(PQ)}{\mathrm{d}Q}=P+Q\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}Q}=P-\frac{P}{\eta Q}Q=P\left(1-\frac{1}{\eta}\right),$$

解得 $P=\dfrac{MC}{1-\dfrac{1}{\eta}}$.

(2) 边际成本 $MC=\dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}Q}=2Q$，$\eta=-\dfrac{\mathrm{d}Q/\mathrm{d}P}{Q/P}=\dfrac{P}{40-P}$，

故由定价模型 $P=\dfrac{2Q}{1-\dfrac{40-P}{P}}$ 可知 $P=30$.

18.【解析】$y=f(x)$ 在点$(x_0,f(x_0))$处的切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

切线与 $x=x_0$,x 轴围成的面积为

$$4=S=\frac{1}{2}|f(x_0)|\left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right|,$$

由 x_0 的任意性可知 $$y^2=8y',$$

变量分离得 $$\frac{8\mathrm{d}y}{y^2}=\mathrm{d}x,$$

解得 $y=-\dfrac{8}{x+C}$. 由 $f(0)=2$ 知 $C=-4$，即 $y=\dfrac{8}{4-x}$.

19.【解析】(1)

$$\begin{aligned}[u(x)v(x)]'&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{u(x+\Delta x)[v(x+\Delta x)-v(x)]+[u(x+\Delta x)-u(x)]v(x)}{\Delta x}\\&=u'(x)v(x)+u(x)v'(x).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2)f'(x)&=u_1'(x)[u_2(x)\cdots u_n(x)]+u_1(x)[u_2(x)\cdots u_n(x)]'\\&=u_1'(x)[u_2(x)\cdots u_n(x)]+u_1(x)u_2'(x)[u_3(x)\cdots u_n(x)]+\\&\quad u_1(x)u_2(x)[u_3(x)\cdots u_n(x)]'\\&=\cdots\\&=u_1'(x)u_2(x)\cdots u_n(x)+u_1(x)u_2'(x)u_3(x)\cdots u_n(x)+\cdots+\\&\quad u_1(x)u_2(x)\cdots u_n'(x).\end{aligned}$$

20.【解析】(1) 因为 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$，故 $|\boldsymbol{A}|=0$. 由 $0=|\boldsymbol{A}|=a^3+a-a=a^3$，得 $a=0$.

(2) 矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}-(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，即 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2)=\boldsymbol{E}$.

因此有 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2)^{-1}$.

由题意可知

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix},$$

$$E-A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix},E-A^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&2\end{pmatrix},$$

由 $(E-A^2 \mid E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}0&0&1&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\-1&0&2&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&2&0&-1\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&1&0&0\end{array}\right)$,

得 $(E-A^2)^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$;

同理得 $(E-A)^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&1&-1\\1&1&0\end{pmatrix}$,

故 $X=(E-A)^{-1}(E-A^2)^{-1}=\begin{pmatrix}3&1&-2\\1&1&-1\\2&1&-1\end{pmatrix}$.

21.【解析】(1) 因为 $A\sim B$，故 $\operatorname{tr}A=\operatorname{tr}B$，$|A|=|B|$.

即 $\begin{cases}3+a=b+2,\\-6-6+9+2a=b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=4,\\b=5.\end{cases}$

(2) 由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-2&3\\1&\lambda-3&3\\-1&2&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-5)=0$ 知 A 的特征值为

$$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=5,$$

当 $\lambda=1$ 时，由 $(E-A)X=0$ 解得对应的线性无关的特征向量为 $X_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$，$X_2=\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$；

当 $\lambda=5$ 时，由 $(5E-A)X=0$ 解得对应的特征向量为 $X_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

令 $P=\begin{pmatrix}2&-3&-1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{pmatrix}$.

22.【解析】(1) $P\{Y>3\}=\int_{3}^{+\infty}2^{-x}\ln 2\mathrm{d}x=-\int_{3}^{+\infty}\mathrm{d}(2^{-x})=\frac{1}{8}$，

故 $$P\{Y=k\}=C_{k-1}^{1}\frac{1}{8}\times\left(\frac{7}{8}\right)^{k-2}\times\frac{1}{8}=\frac{7^{k-2}(k-1)}{8^{k}}.$$

(2) $E(Y)=\sum\limits_{k=2}^{\infty}kP\{Y=k\}=\frac{1}{64}\sum\limits_{k=2}^{\infty}\left(\frac{7}{8}\right)^{k-2}k(k-1)$

$=\frac{1}{64}\left[\sum\limits_{k=2}^{\infty}x^{k}\right]''\Big|_{x=\frac{7}{8}}=\frac{1}{64}\left(\frac{x^{2}}{1-x}\right)''\Big|_{x=\frac{7}{8}}=16.$

23.【解析】(1) $E(X)=\int_{\theta}^{1}x\frac{1}{1-\theta}\mathrm{d}x=\frac{1+\theta}{2}$，

令 $E(X)=\overline{X}$，故 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=2\overline{X}-1$.

(2) 似然函数 $$L(\theta)=\frac{1}{(1-\theta)^{n}}(\theta\leqslant x_i\leqslant 1;i=1,2,\cdots,n),$$

显然似然函数 $L(\theta)$ 关于 θ 单调递增，故 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$.