2014 年全国硕士研究生招生考试

数　学　（二）

（科目代码：302）

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

1．当 $x \to 0^+$ 时，若 $\ln^\alpha(1+2x)$，$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小，则 α 的取值范围是

A．$(2,+\infty)$．　　B．$(1,2)$．　　C．$\left(\frac{1}{2},1\right)$．　　D．$\left(0,\frac{1}{2}\right)$．

2．下列曲线中有渐近线的是

A．$y=x+\sin x$．　　B．$y=x^2+\sin x$．

C．$y=x+\sin\frac{1}{x}$．　　D．$y=x^2+\sin\frac{1}{x}$．

3．设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，则在区间 $[0,1]$ 上

A．当 $f'(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant g(x)$．　　B．当 $f'(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)\leqslant g(x)$．

C．当 $f''(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant g(x)$．　　D．当 $f''(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)\leqslant g(x)$．

4．曲线 $\begin{cases} x=t^2+7, \\ y=t^2+4t+1 \end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处的曲率半径是

A．$\frac{\sqrt{10}}{50}$．　　B．$\frac{\sqrt{10}}{100}$．　　C．$10\sqrt{10}$．　　D．$5\sqrt{10}$．

5．设函数 $f(x)=\arctan x$，若 $f(x)=xf'(\xi)$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\xi^2}{x^2}=$

A．1．　　B．$\frac{2}{3}$．　　C．$\frac{1}{2}$．　　D．$\frac{1}{3}$．

6．设函数 $u(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，在 D 的内部具有二阶连续偏导数，且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\neq 0$ 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，则

A．$u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 D 的边界上取得．

B．$u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 D 的内部取得．

C. $u(x,y)$ 的最大值在 D 的内部取得，最小值在 D 的边界上取得.

D. $u(x,y)$ 的最小值在 D 的内部取得，最大值在 D 的边界上取得.

7. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$

A. $(ad-bc)^2$.　　B. $-(ad-bc)^2$.

C. $a^2d^2-b^2c^2$.　　D. $b^2c^2-a^2d^2$.

8. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 3 维向量，则对任意常数 k,l，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关的

A. 必要非充分条件.　　B. 充分非必要条件.

C. 充分必要条件.　　D. 既非充分也非必要条件.

二、填空题：9 ～ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

9. $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x =$ ________.

10. 设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数，且 $f'(x)=2(x-1)$，$x\in[0,2]$，则 $f(7)=$ ________.

11. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $\mathrm{e}^{2yz}+x+y^2+z=\dfrac{7}{4}$ 确定的函数，则 $\mathrm{d}z\Big|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=$ ________.

12. 曲线 L 的极坐标方程是 $r=\theta$，则 L 在点 $(r,\theta)=\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 处的切线的直角坐标方程是________.

13. 一根长为 1 的细棒位于 x 轴的区间 $[0,1]$ 上，若其线密度 $\rho(x)=-x^2+2x+1$，则该细棒的质心坐标 $\overline{x}=$ ________.

14. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^{\ 2}-x_2^{\ 2}+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1，则 a 的取值范围是________.

三、解答题：15 ～ 23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本题满分 10 分）

求极限 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

16.(本题满分 10 分)

已知函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $x^2+y^2y'=1-y'$，且 $y(2)=0$，求 $y(x)$ 的极大值与极小值.

17.(本题满分 10 分)

设平面区域 $D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$，计算$\displaystyle\iint\limits_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

18.(本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，$z=f(\mathrm{e}^x\cos y)$ 满足$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+\mathrm{e}^x\cos y)\mathrm{e}^{2x}$，若 $f(0)=0, f'(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式.

19.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x), g(x)$ 在区间$[a,b]$上连续，且 $f(x)$ 单调增加，$0\leqslant g(x)\leqslant 1$. 证明：

(1)$0\leqslant\displaystyle\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\leqslant x-a, x\in[a,b]$;

(2)$\displaystyle\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

20.（本题满分 11 分）

设函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}, x\in[0,1]$，定义函数列：

$$f_1(x)=f(x), f_2(x)=f(f_1(x)), \cdots, f_n(x)=f(f_{n-1}(x)), \cdots$$

记 S_n 是由曲线 $y=f_n(x)$，直线 $x=1$ 及 x 轴所围平面图形的面积，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} nS_n$.

21.（本题满分 11 分）

已知函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)$，且 $f(y,y)=(y+1)^2-(2-y)\ln y$，

求曲线 $f(x,y)=0$ 所围图形绕直线 $y=-1$ 旋转所成旋转体的体积.

22.（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(1) 求方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系；

(2) 求满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$.

23.（本题满分 11 分）

证明：n 阶矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & \cdots & 0 & 2\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & n\end{pmatrix}$ 相似.

2014 年数学(二)答案解析

一、选择题

1.【答案】B

【解析】由 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln^{\alpha}(1+2x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(2x)^{\alpha}}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2x}{x}\cdot(2x)^{\alpha-1}=0$，可得 $\alpha>1$.

由 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\left(\frac{1}{2}x^2\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{x}=0$，可得 $0<\alpha<2$.

因此，α 的取值范围为 $(1,2)$.

2.【答案】C

【解析】很容易判断出 A,B,C,D 四个选项中的曲线都不存在垂直渐近线与水平渐近线，现考虑它们是否存在斜渐近线.

根据曲线渐近线的斜率与截距公式可得：

A：$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=1$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sin x-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$，极限不存在，因此不存在斜渐近线.

B：$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+\sin x}{x}=\infty$，因此不存在斜渐近线.

C：$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin\frac{1}{x}}{x}=1$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sin\dfrac{1}{x}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{1}{x}=0$，

因此曲线 $y=x+\sin\dfrac{1}{x}$ 存在斜渐近线 $y=x$.

D：$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+\sin\frac{1}{x}}{x}=\infty$，因此不存在斜渐近线.

3.【答案】D

【解析】当 $f''(x)\geqslant0$ 时，$f(x)$ 为凹函数，

由 $g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$ 可知，$g(x)$ 为过点 $(0,f(0))$ 和 $(1,f(1))$ 的直线，显然有 $g(x)\geqslant f(x)$.

4.【答案】C

【解析】曲率半径 $R=\dfrac{1}{K}$，其中 $K=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$. 由

$$y'=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{2t+4}{2t}=1+\frac{2}{t},\quad y''=\frac{\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{-\frac{2}{t^2}}{2t}=-\frac{1}{t^3},$$

得$y'|_{t=1}=3, y''|_{t=1}=-1$,故 $R=10\sqrt{10}$.

5.【答案】D

【解析】由 $f(x)=xf'(\xi)$,可得$\dfrac{x}{1+\xi^2}=\arctan x$,即 $\xi^2=\dfrac{x}{\arctan x}-1$,则

$$\lim_{x\to0}\frac{\xi^2}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{x}{\arctan x}-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x-\arctan x}{x^2\arctan x}=\lim_{x\to0}\frac{x-\arctan x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{x^2}{1+x^2}}{3x^2}=\frac{1}{3}.$$

6.【答案】A

【解析】令 $A=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, B=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}, C=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$,由题意可得 $A=-C, B\neq0$,

则对区域 D 内部任意一点,都有 $B^2-AC>0$,因此 $u(x,y)$ 在区域 D 内不存在极值点,故 $u(x,y)$ 在区域 D 的边界上取得最值.

7.【答案】B

【解析】$$\begin{vmatrix}0&a&b&0\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\c&0&0&d\end{vmatrix}=-a\begin{vmatrix}a&b&0\\c&d&0\\0&0&d\end{vmatrix}-c\begin{vmatrix}a&b&0\\0&0&b\\c&d&0\end{vmatrix}=-ad(ad-bc)+bc(ad-bc)$$

$$=-(ad-bc)^2.$$

8.【答案】A

【解析】设存在 λ_1,λ_2,使得 $\lambda_1(\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3)+\lambda_2(\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathbf{0}$,

即 $$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+(\lambda_1k+\lambda_2l)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}.$$

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,则有 $\lambda_1=\lambda_2=0$,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

反之,取$k=l=0$,可知$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关,显然,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关的非充分条件.

故 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关的必要非充分条件.

二、填空题

9.【答案】$\dfrac{3\pi}{8}$

【解析】$$\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{(x+1)^2+4}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2+1}\mathrm{d}\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}\Big|_{-\infty}^{1}=\frac{3\pi}{8}.$$

10.【答案】1

【解析】由 $f'(x)=2(x-1), x\in[0,2]$ 可得,

$$f(x)=x^2-2x+C(C\text{ 为任意常数}), x\in[0,2].$$

$f(x)$ 为奇函数,则 $f(0)=0$,由此可得 $C=0$. 因此,当 $x\in[0,2]$ 时,$f(x)=x^2-2x$.

由 $f(x)$ 的周期性可得 $f(7)=f(-1)=-f(1)=1$.

11.【答案】$-\frac{1}{2}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\mathrm{d}y$

【解析】将 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 代入方程,得 $z=0$.

方程两边同时对 x 求导,得 $\mathrm{e}^{2yz}\cdot\left(2y\frac{\partial z}{\partial x}\right)+1+\frac{\partial z}{\partial x}=0$,

将点 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$ 代入,得 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=-\frac{1}{2}$;

方程两边同时对 y 求导,得 $\mathrm{e}^{2yz}\cdot\left(2z+2y\frac{\partial z}{\partial y}\right)+2y+\frac{\partial z}{\partial y}=0$,

将点 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$ 代入,得 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=-\frac{1}{2}$,

因此 $\mathrm{d}z\big|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=-\frac{1}{2}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\mathrm{d}y$.

12.【答案】$y=-\frac{2}{\pi}x+\frac{\pi}{2}$

【解析】曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases}x=\theta\cos\theta,\\ y=\theta\sin\theta,\end{cases}$ 当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时,曲线 L 上对应的点为 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}}=\frac{\sin\theta+\theta\cos\theta}{\cos\theta-\theta\sin\theta},$$

将 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 代入得 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{\pi}$,

因此 L 在点 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线的直角坐标方程是 $y=-\frac{2}{\pi}x+\frac{\pi}{2}$.

13.【答案】$\frac{11}{20}$

【解析】$\bar{x}=\dfrac{\int_0^1 x\rho(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1\rho(x)\mathrm{d}x}=\dfrac{\int_0^1 x(-x^2+2x+1)\mathrm{d}x}{\int_0^1(-x^2+2x+1)\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{11}{12}}{\frac{5}{3}}=\frac{11}{20}$.

14.【答案】$[-2,2]$

【解析】二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&a\\0&-1&2\\a&2&0\end{pmatrix}$,

将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行合同变换化为对角矩阵 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&4-a^2\end{pmatrix}$.

若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的负惯性指数为1,则 $4-a^2\geqslant 0$,即 $-2\leqslant a\leqslant 2$.

三、解答题

15.【解析】由洛必达法则,

$$原式=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t\right]dt}{x^2\cdot\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x}{1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}-1\right)-x=\frac{1}{2}.$$

16.【解析】由题意可知

$$(y^2+1)y'=1-x^2, \qquad ①$$

因此当 $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ 时,$y'<0$;当 $x\in(-1,1)$ 时,$y'>0$,

故 $y(x)$ 的极大值为 $y(1)$,极小值为 $y(-1)$.

求解微分方程 ①,则有

$$(1+y^2)\,dy=(1-x^2)\,dx,即\ d\left(y+\frac{1}{3}y^3\right)=d\left(x-\frac{1}{3}x^3\right),$$

因此有 $y+\frac{1}{3}y^3=x-\frac{1}{3}x^3+C$,由 $y(2)=0$ 得 $C=\frac{2}{3}$,从而 $y+\frac{1}{3}y^3=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}$.

从而 $y=y(x)$ 的极大值为 $y(1)=1$,极小值为 $y(-1)=0$.

17.【解析】令 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\y=r\sin\theta,\end{cases}$ 平面区域 $D=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,1\leqslant r\leqslant 2,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$.故

$$原式=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2\frac{r\cos\theta\sin(r\pi)}{r(\cos\theta+\sin\theta)}r\,dr\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\left(-\frac{3}{\pi}\right)d\theta$$

$$=-\frac{3}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\cos\theta-\sin\theta}{2(\cos\theta+\sin\theta)}+\frac{1}{2}\right]d\theta$$

$$=-\frac{3}{\pi}\left[\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln(\cos\theta+\sin\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right]$$

$$=-\frac{3}{4}.$$

18.【解析】令 $u=e^x\cos y$,则 $u_x=\frac{du}{dx}=e^x\cos y$,$u_y=\frac{du}{dy}=-e^x\sin y$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial(f'e^x\cos y)}{\partial x}+\frac{\partial(-f'e^x\sin y)}{\partial y}$$

$$=f''e^{2x}\cos^2 y+f'e^x\cos y+f''e^{2x}\sin^2 y-f'e^x\cos y=f''e^{2x},$$

即

$$4f(u)+u=f''(u).$$

故该方程的通解为

$$f(u)=C_1\mathrm{e}^{-2u}+C_2\mathrm{e}^{2u}-\frac{1}{4}u(C_1,C_2\text{ 为任意常数}).$$

由 $f(0)=0,f'(0)=0$ 知 $C_1=-\frac{1}{16},C_2=\frac{1}{16}$，故 $f(u)=-\frac{1}{16}\mathrm{e}^{-2u}+\frac{1}{16}\mathrm{e}^{2u}-\frac{1}{4}u$.

19.【证明】(1) 由 $0\leqslant g(x)\leqslant 1$，知$\int_a^x 0\mathrm{d}t\leqslant\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_a^x 1\mathrm{d}t$，

故 $0\leqslant\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\leqslant x-a,x\in[a,b]$.

(2) 令 $F(x)=\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t-\int_a^{a+\int_a^x g(t)\mathrm{d}t}f(t)\mathrm{d}t$，

则 $F'(t)=f(x)g(x)-f\left(a+\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\right)g(x)$. 由于

$$a+\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\leqslant a+(x-a)=x,$$

且 $f(x)$ 单调递增，故 $F'(x)\geqslant 0,x\in[a,b]$.

因此 $F(b)\geqslant F(a)=0$，即$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t}f(x)\mathrm{d}x$.

20.【解析】由题意知 $f_n(x)>0$，故 $S_n=\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$. 又

$$f_2(x)=f\left(\frac{x}{x+1}\right)=\frac{x}{2x+1},f_3(x)=f\left(\frac{x}{2x+1}\right)=\frac{x}{3x+1},$$

猜想 $f_n(x)=\frac{x}{nx+1}$.

显然 $n=1$ 时成立；不妨设 $n=k$ 时也成立，即 $f_k(x)=\frac{x}{kx+1}$，则

$$f_{k+1}(x)=f\left(\frac{x}{kx+1}\right)=\frac{x}{(k+1)x+1},$$

故由数学归纳法知 $f_n(x)=\frac{x}{nx+1}$.

则$\lim\limits_{n\to\infty}nS_n=\lim\limits_{n\to\infty}n\int_0^1\frac{x}{nx+1}\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{n}\ln(1+n)\right]=1$.

21.【解析】由题可知，$f(x,y)=\int 2(y+1)\mathrm{d}y=y^2+2y+\varphi(x)$.

由 $f(y,y)=(y+1)^2-(2-y)\ln y$，可得 $\varphi(x)=1-(2-x)\ln x$，从而

$$f(x,y)=(y+1)^2-(2-x)\ln x.$$

因此曲线 $f(x,y)=0$ 与直线 $y=-1$ 的交点为 $(1,-1),(2,-1)$，
旋转体的体积

$$V=\int_1^2\pi(y+1)^2\mathrm{d}x=\int_1^2\pi(2-x)\ln x\mathrm{d}x=\pi\int_1^2\ln x\,\mathrm{d}\left(2x-\frac{1}{2}x^2\right)$$

$$=\pi\left[\left(2x-\frac{1}{2}x^2\right)\ln x\Big|_1^2-\int_1^2\left(2x-\frac{1}{2}x^2\right)\frac{1}{x}\mathrm{d}x\right]=\left(2\ln 2-\frac{5}{4}\right)\pi.$$

22.【解析】(1)

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

令 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$，即$\begin{cases} x_1+x_4=0, \\ x_2-2x_4=0, \\ x_3-3x_4=0, \end{cases}$取 $x_4=1$，解得 $\boldsymbol{X}=(-1,2,3,1)^{\mathrm{T}}$.

故 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2)$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，等同于解三个方程组

$$\boldsymbol{AX}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{AX}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{AX}_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

由于

$$(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{E})\left(\begin{array}{cccc:ccc} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

故 $\boldsymbol{X}_1=k_1\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{X}_2=k_2\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{X}_3=k_3\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$

则 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -k_1+2 & -k_2+6 & -k_3-1 \\ 2k_1-1 & 2k_3-3 & 2k_3+1 \\ 3k_1-1 & 3k_2-4 & 3k_3+1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}$ $(k_1,k_2,k_3$ 为任意常数).

23.【证明】记 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$.

$$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-n)\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^{n-1}(\lambda-n).$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=n,\lambda_2=0,\cdots,\lambda_n=0$,故存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

同理 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix} \lambda & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda & -(n-1) \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda-n \end{vmatrix}=\lambda^{n-1}(\lambda-n)$,

$\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1=n,\lambda_2=0,\cdots,\lambda_n=0$,故存在可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

故 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}^{-1}$,$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.