2014 年全国硕士研究生招生考试

数　学　(三)

(科目代码:303)

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

1. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,且 $a \neq 0$,则当 n 充分大时有

A. $|a_n| > \dfrac{|a|}{2}$.　　B. $|a_n| < \dfrac{|a|}{2}$.

C. $a_n > a - \dfrac{1}{n}$.　　D. $a_n < a + \dfrac{1}{n}$.

2. 下列曲线中有渐近线的是

A. $y = x + \sin x$.　　B. $y = x^2 + \sin x$.

C. $y = x + \sin \dfrac{1}{x}$.　　D. $y = x^2 + \sin \dfrac{1}{x}$.

3. 设 $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$,当 $x \to 0$ 时,若 $p(x) - \tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小,则下列选项中错误的是

A. $a = 0$.　　B. $b = 1$.　　C. $c = 0$.　　D. $d = \dfrac{1}{6}$.

4. 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数,$g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$,则在区间$[0,1]$上

A. 当 $f'(x) \geqslant 0$ 时,$f(x) \geqslant g(x)$.　　B. 当 $f'(x) \geqslant 0$ 时,$f(x) \leqslant g(x)$.

C. 当 $f''(x) \geqslant 0$ 时,$f(x) \geqslant g(x)$.　　D. 当 $f''(x) \geqslant 0$ 时,$f(x) \leqslant g(x)$.

5. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$

A. $(ad - bc)^2$.　　B. $-(ad - bc)^2$.

C. $a^2d^2 - b^2c^2$.　　D. $b^2c^2 - a^2d^2$.

6. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 3 维向量，则对任意常数 k,l，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关的

A. 必要非充分条件.　　B. 充分非必要条件.

C. 充分必要条件.　　D. 既非充分也非必要条件.

7. 设随机事件 A 与 B 相互独立，且 $P(B)=0.5,P(A-B)=0.3$，则 $P(B-A)=$

A. 0.1.　　B. 0.2.　　C. 0.3.　　D. 0.4.

8. 设 X_1,X_2,X_3 为来自正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，则统计量 $S=\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\,|X_3|}$ 服从的分布为

A. $F(1,1)$.　　B. $F(2,1)$.　　C. $t(1)$.　　D. $t(2)$.

二、填空题：9 ～ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

9. 设某商品的需求函数为 $Q=40-2P$（P 为商品的价格），则该商品的边际收益为________.

10. 设 D 是由曲线 $xy+1=0$ 与直线 $y+x=0$ 及 $y=2$ 围成的有界区域，则 D 的面积为________.

11. 设 $\int_0^a x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}$，则 $a=$________.

12. 二次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}-\mathrm{e}^{y^2}\right)\mathrm{d}x=$________.

13. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1，则 a 的取值范围是________.

14. 设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2x}{3\theta^2}, & \theta<x<2\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 其中 θ 是未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，若 $E\left(c\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\theta^2$，则 $c=$________.

三、解答题：15 ～ 23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$.

16.（本题满分 10 分）

设平面区域 $D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$，

计算 $\iint\limits_D \dfrac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

17.（本题满分 10 分）

设函数 $f(u)$ 具有连续导数，$z=f(\mathrm{e}^x\cos y)$ 满足 $\cos y\dfrac{\partial z}{\partial x}-\sin y\dfrac{\partial z}{\partial y}=(4z+\mathrm{e}^x\cos y)\mathrm{e}^x$，

若 $f(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式.

18.（本题满分 10 分）

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$ 的收敛域及和函数.

19.（本题满分 10 分）

设函数 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)$ 单调增加，$0\leqslant g(x)\leqslant 1$，证明：

(1) $0\leqslant\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\leqslant x-a, x\in[a,b]$；

(2) $\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

20.（本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$，$E$ 为 3 阶单位矩阵.

(1) 求方程组 $AX=0$ 的一个基础解系；

(2) 求满足 $AB=E$ 的所有矩阵 B.

21.（本题满分 11 分）

证明：n 阶矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & \cdots & 0 & 2\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & n\end{pmatrix}$ 相似.

22.（本题满分 11 分）

设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=1\}=P\{X=2\}=\dfrac{1}{2}$，在给定 $X=i$ 的条件下，随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0,i)(i=1,2)$.

(1) 求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$；

(2) 求 $E(Y)$.

23.（本题满分 11 分）

设随机变量 X,Y 的概率分布相同，X 的概率分布为 $P\{X=0\}=\dfrac{1}{3}$，$P\{X=1\}=\dfrac{2}{3}$，且 X 与 Y 的相关系数为 $\rho_{XY}=\dfrac{1}{2}$.

(1) 求 (X,Y) 的概率分布；

(2) 求 $P\{X+Y\leqslant 1\}$.

2014 年数学(三) 答案解析

一、选择题

1.【答案】A

【解析】由$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，知$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|>0$，则当 n 充分大时，有$|a_n|>\dfrac{|a|}{2}$.

2.【答案】C

【解析】很容易判断出 A,B,C,D 四个选项中的曲线都不存在垂直渐近线与水平渐近线，现考虑它们是否存在斜渐近线.

根据曲线渐近线的斜率与截距公式可得：

A：$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=1$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sin x-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$，极限不存在，因此不存在斜渐近线.

B：$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+\sin x}{x}=\infty$，因此不存在斜渐近线.

C：$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin\dfrac{1}{x}}{x}=1$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sin\dfrac{1}{x}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{1}{x}=0$，因此曲线 $y=x+\sin\dfrac{1}{x}$ 存在斜渐近线且为 $y=x$.

D：$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+\sin\dfrac{1}{x}}{x}=\infty$，因此不存在斜渐近线.

3.【答案】D

【解析】令 $f(x)=p(x)-\tan x$，若当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是比 x^3 高阶的无穷小，则

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0,$$

计算可得，$a=0,b=1,c=0,d=\dfrac{1}{3}$.

4.【答案】D

【解析】当 $f''(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 为凹函数，

由 $g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$ 可知，$g(x)$ 为过点$(0,f(0))$和$(1,f(1))$的直线，显然有 $g(x)\geqslant f(x)$.

5.【答案】B

【解析】$\begin{vmatrix}0&a&b&0\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\c&0&0&d\end{vmatrix}=-a\begin{vmatrix}a&b&0\\c&d&0\\0&0&d\end{vmatrix}-c\begin{vmatrix}a&b&0\\0&0&b\\c&d&0\end{vmatrix}=-ad(ad-bc)+bc(ad-bc)$

$=-(ad-bc)^2$.

6.【答案】A

【解析】设存在 λ_1,λ_2，使得 $\lambda_1(\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3)+\lambda_2(\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathbf{0}$，

即
$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+(\lambda_1 k+\lambda_2 l)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}.$$

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则有 $\lambda_1=\lambda_2=0$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

反之，取 $k=l=0$，可知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，显然，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关的非充分条件.

故 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关的必要非充分条件.

7.【答案】B

【解析】由减法公式可得 $P(A-B)=P(A\overline{B})$.

事件 A,B 相互独立，则 $P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})=P(A)[1-P(B)]$，

由 $P(B)=0.5,P(A-B)=0.3$，可得 $P(A)=0.6$，

因此 $P(B-A)=P(B\overline{A})=P(B)P(\overline{A})=P(B)[1-P(A)]=0.5\times0.4=0.2$.

8.【答案】C

【解析】由题意可得 $X_1-X_2\sim N(0,2\sigma^2)$，那么 $\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)$；

由 $X_3\sim N(0,\sigma^2)$，得 $\dfrac{X_3}{\sigma}\sim N(0,1)$，那么 $\dfrac{X_3^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(1)$.

由 t 分布的定义可得 $\dfrac{\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\frac{X_3^2}{\sigma^2}}}\sim t(1)$，即 $\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\,|X_3|}\sim t(1)$.

二、填空题

9.【答案】$20-Q$

【解析】商品的边际收益是指增加一单位产品的销量所增加的收益.

商品的收益函数为 $R(Q)=PQ=\left(20-\dfrac{Q}{2}\right)Q$，因此边际收益为 $R'(Q)=20-Q$.

10.【答案】$\dfrac{3}{2}-\ln 2$

【解析】由题意可得区域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,1\leqslant y\leqslant 2,-y\leqslant x\leqslant-\dfrac{1}{y}\right\}$，

因此 $S_D=\displaystyle\int_1^2\mathrm{d}y\int_{-y}^{-\frac{1}{y}}\mathrm{d}x=\dfrac{3}{2}-\ln 2$.

11.【答案】$\dfrac{1}{2}$

【解析】
$$\int_0^a x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^a-\frac{1}{2}\int_0^a\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}a\mathrm{e}^{2a}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^a=\frac{1}{2}a\mathrm{e}^{2a}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2a}+\frac{1}{4},$$

若$\int_0^a x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$，则$a=\frac{1}{2}$.

12.【答案】$\frac{\mathrm{e}-1}{2}$

【解析】$\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\left(\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}-\mathrm{e}^{y^2}\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}\mathrm{d}x-\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x$，

而$\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$，

$\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x=\int_0^1(1-y)\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y-\int_0^1 y\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y$，

因此$\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\left(\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}-\mathrm{e}^{y^2}\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 y\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{e}-1}{2}$.

13.【答案】$[-2,2]$

【解析】二次型$f(x_1,x_2,x_3)$的系数矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&a\\0&-1&2\\a&2&0\end{pmatrix}$，

将矩阵A进行合同变换化为对角矩阵$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&4-a^2\end{pmatrix}$.

若二次型$f(x_1,x_2,x_3)$的负惯性指数为1，则$4-a^2\geqslant 0$，即$-2\leqslant a\leqslant 2$.

14.【答案】$\frac{2}{5n}$

【解析】$E(c\sum_{i=1}^{n}X_i^2)=c\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)$，$E(X_i^2)=\int_\theta^{2\theta}x^2\cdot\frac{2x}{3\theta^2}\mathrm{d}x=\frac{5}{2}\theta^2$，

因此$c\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)=\frac{5nc}{2}\theta^2$.

若$E(c\sum_{i=1}^{n}X_i^2)=\theta^2$，则$c=\frac{2}{5n}$.

三、解答题

15.【解析】由洛必达法则知，

$$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\cdot\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\right)-x}{1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}-1\right)-x=\frac{1}{2}.$$

16.【解析】令$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\y=r\sin\theta,\end{cases}$平面区域$D=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,1\leqslant r\leqslant 2,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$.故

$$原式=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2\frac{r\cos\theta\sin(r\pi)}{r(\cos\theta+\sin\theta)}r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\left(-\frac{3}{\pi}\right)\mathrm{d}\theta$$

$$=-\frac{3}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\cos\theta-\sin\theta}{2(\cos\theta+\sin\theta)}+\frac{1}{2}\right]\mathrm{d}\theta$$

$$=-\frac{3}{\pi}\left[\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln(\cos\theta+\sin\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right]$$

$$=-\frac{3}{4}.$$

17.【解析】令$u=\mathrm{e}^x\cos y$，则$u_x=\mathrm{e}^x\cos y, u_y=-\mathrm{e}^x\sin y$.故

$$\cos y\cdot z_x-\sin y\cdot z_y=\cos y\cdot f'\cdot\mathrm{e}^x\cos y+\sin y\cdot f'\cdot\mathrm{e}^x\sin y=f'\cdot\mathrm{e}^x,$$

因此有
$$f'(u)=4f(u)+u,$$

故$[f'(u)-4f(u)]\mathrm{e}^{-4u}=u\mathrm{e}^{-4u}$，即

$$[\mathrm{e}^{-4u}f(u)]'=u\mathrm{e}^{-4u},$$

解得
$$f(u)=\mathrm{e}^{4u}\int u\mathrm{e}^{-4u}\,\mathrm{d}u=C\mathrm{e}^{4u}-\frac{u}{4}-\frac{1}{16},$$

由$f(0)=0$，可知$C=\frac{1}{16}$，故$f(u)=\frac{1}{16}\mathrm{e}^{4u}-\frac{u}{4}-\frac{1}{16}$.

18.【解析】$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n+3)(n+5)}{(n+1)(n+3)}=1$，故收敛半径$R=1$.

当$x=\pm1$时，该级数发散，故收敛域为$(-1,1)$.

$$和函数\ S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+4n+3)x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+2}\right)''+\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\right)'$$

$$=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''+\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{3-x}{(1-x)^3},x\in(-1,1).$$

19.【解析】(1) 由$0\leqslant g(x)\leqslant1$，知$0\leqslant\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_a^x 1\,\mathrm{d}t$，

故$0\leqslant\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\leqslant x-a, x\in[a,b]$.

(2) 令
$$F(x)=\int_a^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^{a+\int_a^x g(t)\mathrm{d}t}f(t)\,\mathrm{d}t,$$

则$F'(t)=f(x)g(x)-f\left(a+\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)g(x)$.由于

$$a+\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\leqslant a+(x-a)=x,$$

且 $f(x)$ 单调递增，故当 $x\in[a,b]$ 时，有 $F'(x)\geqslant 0$，

因此 $F(b)\geqslant F(a)=0$，即 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t}f(x)\mathrm{d}x$.

20.【解析】(1)

$$A\rightarrow\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&4&-3&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&-3\end{pmatrix},$$

令 $X=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$，即 $\begin{cases}x_1+x_4=0,\\x_2-2x_4=0,\\x_3-3x_4=0,\end{cases}$ 取 $x_4=1$，解得 $X=(-1,2,3,1)^{\mathrm{T}}$.

故 $AX=0$ 的基础解系为

$$X=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}.$$

(2) $AB=E$，等同于解三个方程组

$$AX_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},AX_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},AX_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

由于

$$(A\mid E)\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&\vdots&1&0&0\\0&1&-1&1&\vdots&0&1&0\\1&2&0&-3&\vdots&0&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&1&\vdots&2&6&-1\\0&1&0&-2&\vdots&-1&-3&1\\0&0&1&-3&\vdots&-1&-4&1\end{pmatrix}$$

故 $X_1=k_1\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\0\end{pmatrix},X_2=k_2\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6\\-3\\-4\\0\end{pmatrix},X_3=k_3\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix},$

则 $B=\begin{pmatrix}-k_1+2&-k_2+6&-k_3-1\\2k_1-1&2k_3-3&2k_3+1\\3k_1-1&3k_2-4&3k_3+1\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix}$ (k_1,k_2,k_3 为任意常数).

21.【解析】记 $A=\begin{pmatrix}1&\cdots&1&1\\1&\cdots&1&1\\\vdots&&\vdots&\vdots\\1&\cdots&1&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&n\end{pmatrix}.$

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - n)\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^{n-1}(\lambda - n).$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = n, \lambda_2 = 0, \cdots, \lambda_n = 0$，故存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

同理 $|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} \lambda & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda & -(n-1) \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda - n \end{vmatrix} = \lambda^{n-1}(\lambda - n)$，

$\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1 = n, \lambda_2 = 0, \cdots, \lambda_n = 0$，故存在可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

故 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}^{-1}$，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.

22.【解析】(1) 令 $F_1(y)$ 表示均匀分布 $U(0,1)$ 的分布函数，$F_2(y)$ 表示均匀分布 $U(0,2)$ 的分布函数.

当 $y \leqslant 0$ 时，$F_Y(y) = 0$；

当 $0 < y \leqslant 1$ 时，$F_Y(y) = P\{Y \leqslant y\} = P\{X = 1\} F_1(y) + P\{X = 2\} F_2(y)$

$$= \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}y = \frac{3}{4}y;$$

当 $1 < y \leqslant 2$ 时，$F_Y(y) = P\{Y \leqslant y\} = P\{X = 1\} + P\{X = 2\} F_2(y)$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}y = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}y;$$

当 $y > 2$ 时，$F_Y(y) = 1$，

故分布函数

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leqslant 0, \\ \dfrac{3}{4}y, & 0 < y \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}y, & 1 < y \leqslant 2, \\ 1, & y > 2. \end{cases}$$

(2) 由(1)知，Y 的密度函数为

$$f(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{4}, & 0<y<1,\\ \dfrac{1}{4}, & 1<y<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

故 $E(Y)=\int_0^2 yf(y)\,dy=\int_0^1\frac{3}{4}y\,dy+\int_1^2\frac{1}{4}y\,dy=\frac{3}{4}$.

23.【解析】(1) 由题知 $E(X)=E(Y)=\frac{2}{3}$，$E(X^2)=E(Y^2)=\frac{2}{3}$，$D(X)=D(Y)=\frac{2}{9}$，

又 $\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\dfrac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\dfrac{1}{2}$，解得 $E(XY)=\frac{5}{9}$.

从而 $P\{X=1,Y=1\}=\frac{5}{9}$，

$$P\{X=1,Y=0\}=P\{X=1\}-P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{9},$$

$$P\{X=0,Y=1\}=P\{Y=1\}-P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{9},$$

$$P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}-P\{X=0,Y=1\}=\frac{2}{9},$$

所以 (X,Y) 的联合概率分布为

X	Y	
	0	1
0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$

(2) $P\{X+Y\leqslant 1\}=1-P\{X+Y>1\}=1-P\{X=1,Y=1\}=\frac{4}{9}$.