2014 年全国硕士研究生招生考试

数 学 （一）

（科目代码：301）

一、选择题：1 ～ 8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

1. 下列曲线中有渐近线的是

A. $y=x+\sin x$.　　B. $y=x^2+\sin x$.

C. $y=x+\sin\frac{1}{x}$.　　D. $y=x^2+\sin\frac{1}{x}$.

2. 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，则在区间 $[0,1]$ 上

A. 当 $f'(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant g(x)$.　　B. 当 $f'(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)\leqslant g(x)$.

C. 当 $f''(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant g(x)$.　　D. 当 $f''(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)\leqslant g(x)$.

3. 设 $f(x,y)$ 是连续函数，则 $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx=$

A. $\int_0^1 dx\int_0^{x-1} f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$.

B. $\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x,y)dy$.

C. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$.

D. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$.

4. 若 $\int_{-\pi}^{\pi}(x-a_1\cos x-b_1\sin x)^2dx=\min\limits_{a,b\in\mathbf{R}}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-b\sin x)^2dx\right\}$，则 $a_1\cos x+b_1\sin x=$

A. $2\sin x$.　　B. $2\cos x$.　　C. $2\pi\sin x$.　　D. $2\pi\cos x$.

5. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}=$

A. $(ad-bc)^2$.　　B. $-(ad-bc)^2$.　　C. $a^2d^2-b^2c^2$.　　D. $b^2c^2-a^2d^2$.

6. 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$均为3维向量，则对任意常数$k,l$，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关的

A. 必要非充分条件. B. 充分非必要条件.

C. 充分必要条件. D. 既非充分也非必要条件.

7. 设随机事件A与B相互独立，且$P(B)=0.5$，$P(A-B)=0.3$，则$P(B-A)=$

A. 0.1. B. 0.2. C. 0.3. D. 0.4.

8. 设连续型随机变量X_1与X_2相互独立且方差均存在，X_1与X_2的概率密度分别为$f_1(x)$与$f_2(x)$，随机变量Y_1的概率密度为$f_{Y_1}(y)=\frac{1}{2}[f_1(y)+f_2(y)]$，随机变量$Y_2=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$，则

A. $E(Y_1)>E(Y_2),D(Y_1)>D(Y_2)$. B. $E(Y_1)=E(Y_2),D(Y_1)=D(Y_2)$.

C. $E(Y_1)=E(Y_2),D(Y_1)<D(Y_2)$. D. $E(Y_1)=E(Y_2),D(Y_1)>D(Y_2)$.

二、填空题：9～14小题，每小题4分，共24分.

9. 曲面$z=x^2(1-\sin y)+y^2(1-\sin x)$在点$(1,0,1)$处的切平面方程为________.

10. 设$f(x)$是周期为4的可导奇函数，且$f'(x)=2(x-1),x\in[0,2]$，则$f(7)=$________.

11. 微分方程$xy'+y(\ln x-\ln y)=0$的满足条件$y(1)=\mathrm{e}^3$的解为$y=$________.

12. 设L是柱面$x^2+y^2=1$与平面$y+z=0$的交线，从z轴正向往z轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分$\oint_L z\mathrm{d}x+y\mathrm{d}z=$________.

13. 设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$的负惯性指数为1，则$a$的取值范围是________.

14. 设总体X的概率密度为$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2x}{3\theta^2}, & \theta<x<2\theta,\\ 0, & 其他,\end{cases}$其中$\theta$是未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体$X$的简单随机样本，若$c\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$是$\theta^2$的无偏估计，则$c=$________.

三、解答题：15～23小题，共94分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本题满分10分）

求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

16.（本题满分 10 分）

设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 确定，求 $f(x)$ 的极值.

17.（本题满分 10 分）

设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，$z=f(e^x\cos y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$，若 $f(0)=0, f'(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式.

18.（本题满分 10 分）

设 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2(z\leqslant 1)$ 的上侧，计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x-1)^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-1)^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

19.（本题满分 10 分）

设数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 满足 $0<a_n<\frac{\pi}{2}, 0<b_n<\frac{\pi}{2}, \cos a_n-a_n=\cos b_n$，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛.

(1) 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$；

(2) 证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$ 收敛.

20.（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(1) 求方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系；

(2) 求满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$.

21.（本题满分 11 分）

证明：n 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.

22.（本题满分 11 分）

设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=1\}=P\{X=2\}=\dfrac{1}{2}$，在给定 $X=i$ 的条件下，随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0,i)(i=1,2)$.

(1) 求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$；

(2) 求 $E(Y)$.

23.（本题满分 11 分）

设总体 X 的分布函数为 $F(x;\theta)=\begin{cases} 1-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x\geqslant 0, \\ 0, & x<0, \end{cases}$ 其中 θ 是未知参数且大于零，X_1，$X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求 $E(X)$ 和 $E(X^2)$；

(2) 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_n$；

(3) 是否存在实数 a，使得对任何 $\varepsilon>0$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}_n-a|\geqslant\varepsilon\}=0$?

2014年数学(一)答案解析

一、选择题

1.【答案】C

【解析】很容易判断出A,B,C,D四个选项中的曲线都不存在垂直渐近线与水平渐近线，现考虑它们是否存在斜渐近线.

根据曲线渐近线的斜率与截距公式可得

A: $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=1, b=\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sin x-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$，极限不存在，因此不存在斜渐近线.

B: $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+\sin x}{x}=\infty$，因此不存在斜渐近线.

C: $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin\frac{1}{x}}{x}=1, b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sin\dfrac{1}{x}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{1}{x}=0$，

因此曲线 $y=x+\sin\dfrac{1}{x}$ 存在斜渐近线且为 $y=x$.

D: $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+\sin\frac{1}{x}}{x}=\infty$，因此不存在斜渐近线.

2.【答案】D

【解析】当 $f''(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 为凹函数，

由 $g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$ 可知，$g(x)$ 为过点 $(0,f(0))$ 和 $(1,f(1))$ 的直线，显然有 $g(x)\geqslant f(x)$.

3.【答案】D

【解析】Y型积分区域为 $D_y=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 1,-\sqrt{1-y^2}\leqslant x\leqslant 1-y\}$.

将其转化为X型积分区域：$D_{x_1}=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1-x\}$,

$$D_{x_2}=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 0,0\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2}\}.$$

因此，$\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y}f(x,y)dx=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$，故A,B选项错误.

令 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$，则两个X型积分区域变为

$$D_1=\left\{(\theta,r)\middle|\,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant r\leqslant\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}\right\},$$

$$D_2=\left\{(\theta,r)\middle|\,\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\pi,0\leqslant r\leqslant 1\right\},$$

因此，$\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$.

4.【答案】A

【解析】
$$\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-b\sin x)^2dx$$
$$=\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx+\int_{-\pi}^{\pi}(a^2\cos^2x+b^2\sin^2x)dx-\int_{-\pi}^{\pi}2x(a\cos x+b\sin x)dx+\int_{-\pi}^{\pi}2ab\cos x\sin x\,dx$$
$$=\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx+\pi a^2+\pi b^2-4\pi b$$
$$=\frac{2}{3}\pi^3+\pi a^2+[(b-2)^2-4]\pi.$$

因此，当 $a=0,b=2$ 时，$\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-b\sin x)^2dx$ 取得最小值，即 $a_1=0,b_1=2$，

则 $a_1\cos x+b_1\sin x=2\sin x$.

5.【答案】B

【解析】
$$\begin{vmatrix}0&a&b&0\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\c&0&0&d\end{vmatrix}=-a\begin{vmatrix}a&b&0\\c&d&0\\0&0&d\end{vmatrix}-c\begin{vmatrix}a&b&0\\0&0&b\\c&d&0\end{vmatrix}=-ad(ad-bc)+bc(ad-bc)$$
$$=-(ad-bc)^2.$$

6.【答案】A

【解析】设存在 λ_1,λ_2，使得 $\lambda_1(\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3)+\lambda_2(\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathbf{0}$，

即
$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+(\lambda_1k+\lambda_2l)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}.$$

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则有 $\lambda_1=\lambda_2=0$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

反之，取 $k=l=0$，可知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，显然，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关的非充分条件.

故 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关的必要非充分条件.

7.【答案】B

【解析】由减法公式可得 $P(A-B)=P(A\overline{B})$.

事件 A,B 相互独立，则 $P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})=P(A)[1-P(B)]$，

由 $P(B)=0.5,P(A-B)=0.3$，可得 $P(A)=0.6$，

因此 $P(B-A)=P(B\overline{A})=P(B)P(\overline{A})=P(B)[1-P(A)]=0.5\times0.4=0.2$.

8.【答案】D

【解析】$E(Y_1)=\int_{-\infty}^{\infty}y\cdot\frac{1}{2}[f_1(y)+f_2(y)]dy=\frac{1}{2}E(X_1)+\frac{1}{2}E(X_2)$，

$$E(Y_2)=E\left[\frac{1}{2}(X_1+X_2)\right]=\frac{1}{2}E(X_1)+\frac{1}{2}E(X_2),\text{因此 } E(Y_1)=E(Y_2).$$

$$E(Y_1^2)=\int_{-\infty}^{\infty}y^2\cdot\frac{1}{2}[f_1(y)+f_2(y)]\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}E(X_1^2)+\frac{1}{2}E(X_2^2),$$

$$D(Y_1)=E(Y_1^2)-E^2(Y_1)=\frac{1}{2}E(X_1^2)+\frac{1}{2}E(X_2^2)-\frac{1}{4}[E(X_1)+E(X_2)]^2,$$

$$D(Y_2)=E(Y_2^2)-E^2(Y_2)=\frac{1}{4}E[(X_1+X_2)^2]-\frac{1}{4}[E(X_1)E(X_2)]^2,$$

$$D(Y_1)-D(Y_2)=\frac{1}{4}E(X_1-X_2)^2>0,\text{因此 } D(Y_1)>D(Y_2).$$

二、填空题

9.【答案】$2x-y-z-1=0$

【解析】令 $F(x,y,z)=x^2(1-\sin y)+y^2(1-\sin x)-z$，

经计算，曲面的法向量为

$$\{F_x,F_y,F_z\}=\{2x(1-\sin y)-y^2\cos x,\ -x^2\cos y+2y(1-\sin x),\ -1\},$$

那么曲面在$(1,0,1)$处的法向量 $\boldsymbol{n}=\{2,-1,-1\}$，则

切平面为 $2(x-1)-y-(z-1)=0$，即 $2x-y-z-1=0$.

10.【答案】1

【解析】由 $f'(x)=2(x-1),x\in[0,2]$ 可得，

$f(x)=x^2-2x+C$（C 为任意常数），$x\in[0,2]$.

$f(x)$ 为奇函数，则 $f(0)=0$，由此可得 $C=0$. 因此，当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=x^2-2x$.

由 $f(x)$ 的周期性可得，$f(7)=f(-1)=-f(1)=1$.

11.【答案】$x\mathrm{e}^{2x+1}$

【解析】原方程可化为$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$.

令 $t=\dfrac{y}{x}$，则$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}(tx)}{\mathrm{d}x}=x\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}+t$，那么原方程变为 $x\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}+t=t\ln t$，变量分离得

$\dfrac{\mathrm{d}t}{t\ln t-t}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$，两边同时积分得，$t=\mathrm{e}^{Cx+1}$（$C$ 为任意常数），因此 $y=x\mathrm{e}^{Cx+1}$（C 为任意常数）.

将 $y(1)=\mathrm{e}^3$ 代入，解得 $C=2$. 因此，满足 $y(1)=\mathrm{e}^3$ 的方程的解为 $y=x\mathrm{e}^{2x+1}$.

12.【答案】π

【解析】将直角坐标系化为极坐标系

令$\begin{cases}x=\cos\theta,\\ y=\sin\theta, & (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)，则\\ z=-\sin\theta\end{cases}$

$$\oint_L z\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta=\pi.$$

13.【答案】$[-2,2]$

【解析】二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ 0 & -1 & 2\\ a & 2 & 0\end{pmatrix}$.

将矩阵 A 进行合同变换化为对角矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 4-a^2\end{pmatrix}$.

若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的负惯性指数为1，则 $4-a^2\geqslant 0$，即 $-2\leqslant a\leqslant 2$.

14.【答案】$\dfrac{2}{5n}$

【解析】若 $c\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 是 θ^2 的无偏估计，则 $E\left(c\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\theta^2$.

$E\left(c\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2\right)=c\sum\limits_{i=1}^{n}E(X_i^2)$，$E(X_i^2)=\int_{\theta}^{2\theta}x^2\cdot\dfrac{2x}{3\theta^2}\mathrm{d}x=\dfrac{5}{2}\theta^2$，因此 $c\sum\limits_{i=1}^{n}E(X_i^2)=\dfrac{5nc}{2}\theta^2$，

则可得 $c=\dfrac{2}{5n}$.

三、解答题

15.【解析】由洛必达法则知，

$$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\cdot\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\right)-x}{1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}-1\right)-x=\frac{1}{2}.$$

16.【解析】微分方程两边同时对 x 求导可得

$$3y^2y'+2xyy'+y^2+2xy+x^2y'=0,$$

整理得

$$(3y^2+2xy+x^2)y'=-y(y+2x).\tag{1}$$

由于 $3y^2+2xy+x^2=(x+y)^2+2y^2\geqslant 0$，故 $y'=0$，当且仅当 $y=-2x$ 或 $y=0$（舍去）.

将 $y=-2x$ 代入原微分方程，解得 $\begin{cases}x=1,\\ y=-2.\end{cases}$

式(1)两边再次对 x 求导，可得

$$(6yy'+2xy'+2y+2x)y'+(3y^2+2xy+x^2)y''=-y'(y+2x)-y(y'+2).$$

故可知 $y''|_{(1,-2)}=\dfrac{4}{9}>0$. 因此 $x=1$ 为 $f(x)$ 的极小值点，$f(1)=-2$ 为 $f(x)$ 的极小值.

17.【解析】令 $u=\mathrm{e}^x\cos y$，则 $u_x=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^x\cos y$，$u_y=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=-\mathrm{e}^x\sin y$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial(f'e^x\cos y)}{\partial x}+\frac{\partial(-f'e^x\sin y)}{\partial y}$$

$=f''e^{2x}\cos^2 y+f'e^x\cos y+f''e^{2x}\sin^2 y-f'e^x\cos y=f''e^{2x}$.

因此
$$4f(u)+u=f''(u),$$

故该方程的通解为

$$f(u)=C_1e^{-2u}+C_2e^{2u}-\frac{1}{4}u(C_1,C_2\text{ 为任意常数}).$$

由 $f(0)=0,f'(0)=0$ 知 $C_1=-\frac{1}{16},C_2=\frac{1}{16}$，故 $f(u)=-\frac{1}{16}e^{-2u}+\frac{1}{16}e^{2u}-\frac{1}{4}u$.

18.【解析】记 $\Sigma_0:\begin{cases}z=1,\\x^2+y^2\leqslant 1,\end{cases}$ 取下侧，D 为 Σ 和 Σ_0 围成的区域.

故由高斯公式及对称性可知

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_0}(x-1)^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-1)^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iiint_D[3(x-1)^2+3(y-1)^2+1]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=-\iiint_D(3x^2+3y^2+7)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{z}}(3r^2+7)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

$$=-\left(\frac{7}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi\right)=-4\pi.$$

由 $z=1$ 可知，$\iint_{\Sigma_0}(x-1)^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-1)^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，

故 $I=-4\pi$.

19.【证明】(1) 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ 收敛，故 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$. 当 $0<a_n<\frac{\pi}{2}$，有 $\cos b_n=\cos a_n-a_n<\cos a_n$.

所以 $0<a_n<b_n<\frac{\pi}{2}$，因此 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

(2) 由 $\frac{a_n}{b_n}=\frac{\cos a_n-\cos b_n}{b_n}=\frac{2\sin\frac{a_n+b_n}{2}\sin\frac{b_n-a_n}{2}}{b_n}<\frac{2\cdot\frac{a_n+b_n}{2}\cdot\frac{b_n-a_n}{2}}{b_n}$

$$=\frac{b_n^2-a_n^2}{2b_n}<\frac{b_n^2}{2b_n}=\frac{b_n}{2},$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$ 收敛.

20.【解析】(1)

$$\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&4&-3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&-3\end{pmatrix},$$

令 $X=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$，即$\begin{cases}x_1+x_4=0,\\ x_2-2x_4=0,\\ x_3-3x_4=0,\end{cases}$取 $x_4=1$，解得 $X=(-1,2,3,1)^{\mathrm{T}}$.

故 $AX=0$ 的基础解系为

$$X=\begin{bmatrix}-1\\2\\3\\1\end{bmatrix}.$$

(2)$AB=E$，等同于解三个方程组

$$AX_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},AX_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},AX_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

由于

$$(A\,\vdots\,E)\left(\begin{array}{cccc:ccc}1&-2&3&-4&1&0&0\\0&1&-1&1&0&1&0\\1&2&0&-3&0&0&1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc:ccc}1&0&0&1&2&6&-1\\0&1&0&-2&-1&-3&1\\0&0&1&-3&-1&-4&1\end{array}\right)$$

故 $X_1=k_1\begin{bmatrix}-1\\2\\3\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\-1\\-1\\0\end{bmatrix},X_2=k_2\begin{bmatrix}-1\\2\\3\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6\\-3\\-4\\0\end{bmatrix},X_3=k_3\begin{bmatrix}-1\\2\\3\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\0\end{bmatrix}$,

则 $B=\begin{bmatrix}-k_1+2&-k_2+6&-k_3-1\\2k_1-1&2k_3-3&2k_3+1\\3k_1-1&3k_2-4&3k_3+1\\k_1&k_2&k_3\end{bmatrix}$ (k_1,k_2,k_3 为任意常数).

21.【证明】记 $A=\begin{bmatrix}1&\cdots&1&1\\1&\cdots&1&1\\\vdots&&\vdots&\vdots\\1&\cdots&1&1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&n\end{bmatrix}$.

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&\cdots&-1&-1\\-1&\cdots&-1&-1\\\vdots&&\vdots&\vdots\\-1&\cdots&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-n)\begin{vmatrix}1&\cdots&1&1\\0&\cdots&0&0\\\vdots&&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^{n-1}(\lambda-n).$$

因此 A 的特征值为 $\lambda_1=n,\lambda_2=0,\cdots,\lambda_n=0$，故存在可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

同理 $|\lambda E-B|=\begin{vmatrix} \lambda & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda & -(n-1) \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda-n \end{vmatrix}=\lambda^{n-1}(\lambda-n)$，

B 的特征值为 $\lambda_1=n,\lambda_2=0,\cdots,\lambda_n=0$，故存在可逆矩阵 Q，使得

$$Q^{-1}BQ=\begin{pmatrix} n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

故 $A=PQ^{-1}BQP^{-1}$，A 与 B 相似.

22.【解析】(1) 令 $F_1(y)$ 表示均匀分布 $U(0,1)$ 的分布函数，$F_2(y)$ 表示均匀分布 $U(0,2)$ 的分布函数.

当 $y\leqslant 0$ 时，$F_Y(y)=0$；

当 $0<y\leqslant 1$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X=1\}F_1(y)+P\{X=2\}F_2(y)$

$$=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}y=\frac{3}{4}y;$$

当 $1<y\leqslant 2$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X=1\}+P\{X=2\}F_2(y)$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}y=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}y;$$

当 $y>2$ 时，$F_Y(y)=1$，

故分布函数

$$F_Y(y)=\begin{cases} 0, & y\leqslant 0, \\ \frac{3}{4}y, & 0<y\leqslant 1, \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}y, & 1<y\leqslant 2, \\ 1, & y>2. \end{cases}$$

(2) 由 (1) 知，Y 的密度函数为

$$f(y)=\begin{cases} \frac{3}{4}, & 0<y<1, \\ \frac{1}{4}, & 1<y<2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

故 $E(Y)=\int_0^2 yf(y)\,dy=\int_0^1 \frac{3}{4}y\,dy+\int_1^2 \frac{1}{4}y\,dy=\frac{3}{4}$.

23.【解析】(1)X 的密度函数

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{2x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

故
$$E(X)=\int_0^{+\infty} xf(x)dx=\int_0^{+\infty}\frac{2x^2}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx=\int_0^{+\infty}(-x)\,de^{-\frac{x^2}{\theta}}$$
$$=-xe^{-\frac{x^2}{\theta}}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx=\frac{\sqrt{\pi\theta}}{2},$$
$$E(X^2)=\int_0^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^{+\infty}\frac{2x^3}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx=\int_0^{+\infty}(-x^2)\,de^{-\frac{x^2}{\theta}}$$
$$=-x^2e^{-\frac{x^2}{\theta}}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}2xe^{-\frac{x^2}{\theta}}dx=\theta.$$

(2) 似然函数为

$$L(\theta)=\begin{cases}\frac{2^n x_1x_2\cdots x_n}{\theta^n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^n x_i^2}, & x_i>0(i=1,2\cdots,n),\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

取对数得
$$\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^n \ln x_i+n\ln 2-n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n x_i^2.$$

由 $\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^n x_i^2=0$，得 $\theta=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2$，

故 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$.

(3)$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布，故由辛钦大数定律知，n 充分大时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$ 依概率收敛于 $E(X^2)$. 故存在 $a=E(X^2)=\theta$，使得 $\forall\varepsilon>0,\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}-a|\geqslant\varepsilon\}=0$.