2013 年全国硕士研究生招生考试

数　学　(二)

(科目代码:302)

一、选择题:1 ～ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

1. 设 $\cos x - 1 = x\sin\alpha(x)$,其中 $|\alpha(x)| < \frac{\pi}{2}$,则当 $x \to 0$ 时,$\alpha(x)$ 是

A. 比 x 高阶的无穷小.　　B. 比 x 低阶的无穷小.

C. 与 x 同阶但不等价的无穷小.　　D. 与 x 等价的无穷小.

2. 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $\cos(xy) + \ln y - x = 1$ 确定,则 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(\frac{2}{n}\right) - 1\right] =$

A. 2.　　B. 1.　　C. -1.　　D. -2.

3. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leqslant x < \pi, \\ 2, & \pi \leqslant x \leqslant 2\pi, \end{cases}$ $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,则

A. $x = \pi$ 是函数 $F(x)$ 的跳跃间断点.　　B. $x = \pi$ 是函数 $F(x)$ 的可去间断点.

C. $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处连续但不可导.　　D. $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处可导.

4. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1 < x < \mathrm{e}, \\ \dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1} x}, & x \geqslant \mathrm{e}, \end{cases}$ 若反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,则

A. $\alpha < -2$.　　B. $\alpha > 2$.　　C. $-2 < \alpha < 0$.　　D. $0 < \alpha < 2$.

5. 设 $z = \frac{y}{x}f(xy)$,其中函数 f 可微,则 $\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} =$

A. $2yf'(xy)$.　　B. $-2yf'(xy)$.

C. $\frac{2}{x}f(xy)$.　　D. $-\frac{2}{x}f(xy)$.

6. 设 D_k 是圆域 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ 位于第 k 象限的部分,记 $I_k = \iint\limits_{D_k}(y - x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ $(k = 1,2,3,4)$,则

A. $I_1 > 0$.　　B. $I_2 > 0$.　　C. $I_3 > 0$.　　D. $I_4 > 0$.

7. 设 A,B,C 均为 n 阶矩阵，若 $AB=C$，且 B 可逆，则

A. 矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价.

B. 矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价.

C. 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价.

D. 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的列向量组等价.

8. 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为

A. $a=0,b=2$.　　B. $a=0$，b 为任意常数.

C. $a=2,b=0$.　　D. $a=2$，b 为任意常数.

二、填空题：9 ～ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left[2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=$ ________.

10. 设函数 $f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-e^t}\,dt$，则 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $y=0$ 处的导数 $\left.\dfrac{dx}{dy}\right|_{y=0}=$ ________.

11. 设封闭曲线 L 的极坐标方程为 $r=\cos 3\theta\left(-\dfrac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$，则 L 所围平面图形的面积为________.

12. 设 $\begin{cases} x=\arctan t, \\ y=\ln\sqrt{1+t^2} \end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处的法线方程为________.

13. 已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x}$，$y_2=e^x-xe^{2x}$，$y_3=-xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解，则该方程满足初始条件 $y|_{x=0}=0$，$y'|_{x=0}=1$ 的解为 $y=$ ________.

14. 设 $A=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵，$|A|$ 为 A 的行列式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，若 $a_{ij}+A_{ij}=0$ $(i,j=1,2,3)$，则 $|A|=$ ________.

三、解答题：15 ～ 23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本题满分 10 分）

当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小，求 n 与 a 的值.

16.（本题满分 10 分）

设 D 是由曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$，直线 $x=a(a>0)$ 及 x 轴所围成的平面图形，V_x，V_y 分别是 D 绕 x 轴，y 轴旋转一周所得旋转体的体积，若 $V_y=10V_x$，求 a 的值.

17.（本题满分 10 分）

设平面区域 D 由直线 $x=3y$，$y=3x$ 及 $x+y=8$ 围成，计算 $\iint\limits_D x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

18.（本题满分 10 分）

设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(1)=1$，证明：

(1) 存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$；

(2) 存在 $\eta\in(-1,1)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

19.（本题满分 10 分）

求曲线 $x^3-xy+y^3=1(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$ 上的点到坐标原点的最长距离与最短距离.

20.（本题满分 11 分）

设函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小值；

(2) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限.

21.（本题满分 11 分）

设曲线 L 的方程为 $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x\,(1\leqslant x\leqslant \mathrm{e})$.

(1) 求 L 的弧长；

(2) 设 D 是由曲线 L，直线 $x=1$，$x=\mathrm{e}$ 及 x 轴所围平面图形，求 D 的形心的横坐标.

22.（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$，当 a，b 为何值时，存在矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$，并求所有矩阵 $\boldsymbol{C}$.

23.（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$，记

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}.$$

(1) 证明：二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$；

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量，证明 f 在正交变化下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

2013 年数学(二)答案解析

一、选择题

1.【答案】C

【解析】由 $\cos x-1\sim-\frac{1}{2}x^2(x\to0)$，可得 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\sin\alpha(x)}{-\frac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\alpha(x)}{-\frac{1}{2}x}=1$.

而由于 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$，因此 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\alpha(x)}{x}=-\frac{1}{2}$，即当 $x\to0$ 时，$\alpha(x)$ 与 x 是同阶但不等价的无穷小.

2.【答案】A

【解析】将 $x=0$ 代入 $\cos(xy)+\ln y-x=1$ 得 $f(0)=1$. 又因为

$$\lim_{n\to\infty}n\left[f\left(\frac{2}{n}\right)-1\right]=2\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{2}{n}\right)-1}{\frac{2}{n}}=2\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)}{\frac{2}{n}},$$

因此由导数的定义可得 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(\frac{2}{n}\right)-1\right]=2f'(0)$.

方程 $\cos(xy)+\ln y-x=1$ 两边同时对 x 求导，得 $-\sin(xy)\cdot(y+xy')+\frac{y'}{y}-1=0$，

则代入 $x=0,y=1$，得 $y'|_{x=0}=f'(0)=1$，

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(\frac{2}{n}\right)-1\right]=2f'(0)=2$.

3.【答案】C

【解析】$\lim\limits_{u\to\pi^-}F(u)=\lim\limits_{u\to\pi^-}\int_0^u\sin x\,dx=1-\lim\limits_{u\to\pi^-}\cos u=2$，

$\lim\limits_{u\to\pi^+}F(u)=\int_0^\pi\sin x\,dx+\lim\limits_{u\to\pi^+}\int_\pi^u2dx=2+2\lim\limits_{u\to\pi^+}(u-\pi)=2$，

显然有 $F(\pi+0)=F(\pi-0)$，因此函数 $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续.

$$F'(\pi+0)=\lim_{x\to\pi^+}\frac{F(x)-F(\pi)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{\int_0^\pi\sin x\,dx+\int_\pi^x2dx-\int_0^\pi\sin x\,dx}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{\int_\pi^x2dx}{x-\pi}=2,$$

$$F'(\pi-0)=\lim_{x\to\pi^-}\frac{F(\pi)-F(x)}{\pi-x}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{\int_0^\pi\sin x\,dx-\int_0^x\sin x\,dx}{\pi-x}=0\neq F'(\pi+0)=2,$$

因此 $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处不可导.

4.【答案】D

【解析】$\int_1^{+\infty}f(x)dx=\int_1^e\frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}dx+\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}dx$.

对于$\int_1^{e}\frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}\mathrm{d}x$：

$x=1$ 为瑕点，因此$\int_1^{e}\frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}\mathrm{d}x=\lim\limits_{u\to 1^+}\int_u^{e}\frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2-\alpha}\lim\limits_{u\to 1^+}\left[\frac{1}{(x-1)^{\alpha-2}}\Bigg|_u^{e}\right]$，

要使上述瑕积分收敛，即上式极限存在，则 $\alpha<2$.

对于$\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}\mathrm{d}x$：

$x=+\infty$ 为瑕点，因此$\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}\mathrm{d}x=\lim\limits_{u\to+\infty}\int_e^{u}\frac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{\alpha}\lim\limits_{u\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln^{\alpha}x}\Bigg|_e^{u}\right)$，

要使上述无穷积分收敛，即上式极限存在，则需 $\alpha>0$.

故$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是上述两个积分同时收敛，因此 $0<\alpha<2$.

5.【答案】A

【解析】$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}f(xy)+\frac{y^2}{x}f'(xy)$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}f(xy)+yf'(xy)$，

因此$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2yf'(xy)$.

6.【答案】B

【解析】$I_1=\iint\limits_{D_1}(y-x)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r(r\sin\theta-r\cos\theta)\mathrm{d}r=0$，

$I_2=\iint\limits_{D_2}(y-x)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r(r\sin\theta-r\cos\theta)\mathrm{d}r=\frac{2}{3}>0$，

$I_3=\iint\limits_{D_3}(y-x)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r(r\sin\theta-r\cos\theta)\mathrm{d}r=0$，

$I_4=\iint\limits_{D_4}(y-x)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r(r\sin\theta-r\cos\theta)\mathrm{d}r=-\frac{2}{3}<0$，

事实上，可以直接判断 $I_2>0$，因为在第二象限中 $x<0,y>0$，所以 I_2 中被积函数在积分区域内的取值恒大于 0，故积分大于 0.

7.【答案】B

【解析】右乘可逆矩阵相当于对矩阵的列向量作相应变换，因此矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价.

8.【答案】B

【解析】令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，

由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，又矩阵 $\boldsymbol{B}$ 已为对角矩阵，因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相似的充要条件是两矩阵特征值相等. 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $2,b,0$，经计算矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项

式为 $f(\lambda)=|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda(\lambda-2)(\lambda-b)-2a^2\lambda$.

若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则 $f(2)=0, f(b)=0, f(0)=0$，解得 $a=0$，b 为任意常数.

二、填空题

9.【答案】$\sqrt{\mathrm{e}}$

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\left[2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{x-\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{x}{x-\ln(1+x)}\cdot\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}}$

$$=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{2(1+x)}}=\sqrt{\mathrm{e}}.$$

10.【答案】$\dfrac{1}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-1}}}$

【解析】$f'(x)=\sqrt{1-\mathrm{e}^x}$. 函数与其反函数的导数互为倒数，即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}$.

而当 $y=0$ 时，$x=-1$，

因此，$\left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|_{y=0}=\dfrac{1}{f'(-1)}=\dfrac{1}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-1}}}$.

11.【答案】$\dfrac{\pi}{12}$

【解析】封闭曲线 L 在极坐标系下的面积为

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos 3\theta}r\,\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 6\theta)\,\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{12}.$$

12.【答案】$x+y-\dfrac{1}{2}\ln 2-\dfrac{\pi}{4}=0$

【解析】将 $t=1$ 代入参数方程得 $x=\dfrac{\pi}{4}, y=\dfrac{1}{2}\ln 2$.

由 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{\frac{t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}}=t$，得曲线在 $t=1$ 处的切线斜率为 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=1}=1$，那么在该点处的法线斜率为 -1.

因此曲线的法线方程为 $y-\dfrac{1}{2}\ln 2=-\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$，即 $x+y-\dfrac{1}{2}\ln 2-\dfrac{\pi}{4}=0$.

13.【答案】$-\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{3x}-x\mathrm{e}^{2x}$

【解析】设 y_1, y_2, y_3 为二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 的解，则由线性微分方程解的结构可知 y_1-y_3, y_2-y_3 为对应的齐次线性微分方程的解，即 $\mathrm{e}^x, \mathrm{e}^{3x}$ 为 $y''+py'+qy=0$ 的两个线性无关的解，因此齐次线性微分方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{3x}\ (C_1, C_2\text{ 为任意常数}),$$

故 $y''+py'+qy=f(x)$ 的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{3x}-x\mathrm{e}^{2x}$（$C_1, C_2$ 为任意常数）.

由$y|_{x=0}=0,y'|_{x=0}=1$，解得$C_1=-1,C_2=1$，因此满足初始条件$y|_{x=0}=0,y'|_{x=0}=1$的特解为$y=-e^x+e^{3x}-xe^{2x}$.

14.【答案】-1

【解析】由公式$A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$，可得$|A^*|=|A|^2$. 由$a_{ij}=-A_{ij}$可得$A^T=-A^*$，两边取行列式可得$|A|=(-1)^3|A|^2$，即得$|A|=0$或-1.

由于矩阵A为非零矩阵，因此至少存在一个非零元素，不妨设$a_{11}\neq 0$.

将矩阵按第1行展开得$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=-a_{11}^2-a_{12}^2-a_{13}^2<0$，

因此$|A|=-1$.

三、解答题

15.【解析】$1=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{ax^n}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\left[1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right]\left[1-\frac{4x^2}{2}+o(x^2)\right]\left[1-\frac{9x^2}{2}+o(x^2)\right]}{ax^n}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{7x^2+o(x^2)}{ax^n},$$

故$a=7,n=2$.

16.【解析】旋转体的体积

$$V_x=\int_0^a\pi(x^{\frac{1}{3}})^2\mathrm{d}x=\int_0^a\pi x^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}x=\frac{3}{5}\pi a^{\frac{5}{3}},$$

$$V_y=2\pi\int_0^a x\cdot x^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x=2\pi\int_0^a x^{\frac{4}{3}}\mathrm{d}x=\frac{6}{7}\pi a^{\frac{7}{3}}.$$

由$V_y=10V_x$，知$a=7\sqrt{7}$.

17.【解析】原式$=\int_0^2\int_{\frac{x}{3}}^{3x}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x+\int_2^6\int_{\frac{x}{3}}^{8-x}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_0^2\frac{8}{3}x^3\mathrm{d}x+\int_2^6x^2\left(8-\frac{4}{3}x\right)\mathrm{d}x=\frac{416}{3}$.

18.【证明】(1)$f(x)$为奇函数，故$f(0)=0$. 由中值定理知，存在$\xi\in(0,1)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=1.$$

(2)令$g(x)=e^x[f'(x)-1]$.

$f(x)$为奇函数，故$f'(x)$为偶函数，因此

$$g(\xi)=g(-\xi)=0.$$

因此由中值定理知，存在$\eta\in(-\xi,\xi)\subset(-1,1)$，使得

$$g'(\eta)=0,$$

即$e^\eta[f'(\eta)-1+f''(\eta)]=0$，因此有$f'(\eta)+f''(\eta)=1$.

19.【解析】设曲线上点到原点的距离为$d(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$，构造拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2-\lambda(x^3-xy+y^3-1).$$

$$\text{则由}\begin{cases}0=\dfrac{\partial L}{\partial x}=2x-\lambda(3x^2-y),\\0=\dfrac{\partial L}{\partial y}=2y-\lambda(3y^2-x),\\0=\dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=-(x^3-xy+y^3-1),\end{cases}\quad\text{解得}\begin{cases}x=1,\\y=1,\\\lambda=1.\end{cases}$$

即点 $(1,1,1)$ 为 $L(x,y,\lambda)$ 的驻点，$d(1,1)=\sqrt{2}$，

端点值 $d(0,1)=1, d(1,0)=1$，

故曲线上的点到原点的最长距离为 $\sqrt{2}$，最短距离为 1.

20.【解析】(1) $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$，

因此当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

故 $f(x)$ 的最小值为 $f(1)=0+1=1$.

(2) 由(1)知，$\ln x_n+\dfrac{1}{x_n}\geqslant 1$，因此有 $\dfrac{1}{x_n}>\dfrac{1}{x_{n+1}}$，即 $x_n<x_{n+1}$.

因此 $\{x_n\}$ 为单调递增数列且 $x_n>0$，故有 $\ln x_n<1-\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$，因此 $x_n<\mathrm{e}$.

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，不妨设为 A，则有 $\ln A+\dfrac{1}{A}\leqslant 1$，又 $\ln A+\dfrac{1}{A}\geqslant 1$，即 $\ln A+\dfrac{1}{A}=1$，

解得 $A=1$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

21.【解析】(1) 弧长 $l=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2x}\right)^2}\,\mathrm{d}x$

$$=\int_1^{\mathrm{e}}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2x}\right)\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^2+1}{4}.$$

(2) 令 $I=\displaystyle\iint_D\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，$D$ 的形心的横坐标是 $\bar{x}=\dfrac{\displaystyle\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{I}$，而

$$I=\int_1^{\mathrm{e}}\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{12}(\mathrm{e}^3-1)-\frac{1}{2}=\frac{\mathrm{e}^3-7}{12},$$

$$\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_1^{\mathrm{e}}x\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x\right)\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^4-1}{16}-\frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}}x\ln x\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^4-1}{16}-\frac{1}{4}\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\,\mathrm{d}(x^2)$$

$$=\frac{\mathrm{e}^4-1}{16}-\frac{1}{4}\left[x^2\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}x^2\mathrm{d}(\ln x)\right]=\frac{\mathrm{e}^4-2\mathrm{e}^2-3}{16}.$$

故 $\bar{x}=\dfrac{3(\mathrm{e}^4-2\mathrm{e}^2-3)}{4(\mathrm{e}^3-7)}$.

22.【解析】不妨设 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}c_1&c_2\\c_3&c_4\end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\begin{pmatrix}1&a\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1&c_2\\c_3&c_4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}c_1&c_2\\c_3&c_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&a\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ac_3-c_2&c_2+ac_4-ac_1\\c_1-c_3-c_4&c_2-ac_3\end{pmatrix}.$$

因此有$\begin{cases} ac_3 - c_2 = 0, \\ c_2 + ac_4 - ac_1 = 1, \\ c_1 - c_3 - c_4 = 1, \\ c_2 - ac_3 = b. \end{cases}$

记 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & a & 0 \\ -a & 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -a & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$，即转换为求解方程 $\boldsymbol{PX} = \boldsymbol{D}$.

$$(\boldsymbol{P},\boldsymbol{D}) = \left(\begin{array}{cccc:c} 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 1+a \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right),$$

当$\begin{cases} 1+a=0, \\ b=0, \end{cases}$即$\begin{cases} a=-1, \\ b=0 \end{cases}$时，$r(\boldsymbol{P}) = r(\boldsymbol{P},\boldsymbol{D}) = 2 < 4$，此时方程组有无穷多解，通解为

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ (k_1, k_2 \text{ 为任意常数}).$$

故存在 $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 + 1 & -k_1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}$ (k_1, k_2 为任意常数)，使得 $\boldsymbol{AC} - \boldsymbol{CA} = \boldsymbol{B}$.

23.【解析】(1) 由题知

$$f(x_1,x_2,x_3) = 2(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}(b_1,b_2,b_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= (x_1,x_2,x_3)(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

又 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 是对称矩阵，因此二次型 f 对应的矩阵是 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$.

(2) 作变换 $y_1 = (a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$，$y_2 = (b_1,b_2,b_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$. 因为 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 为相互正交的单位向量，故该变换为正交变换且 f 对应的标准形为 $f = 2y_1^2 + y_2^2$.