考研派之家公众号，回复“考研真题”可领取专业课真题

2013 年全国硕士研究生招生考试

数　学　(三)

(科目代码:303)

一、选择题:1 ～ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

1. 当 $x \to 0$ 时,用“$o(x)$”表示比 x 高阶的无穷小量,则下列式子中错误的是

A. $x \cdot o(x^2) = o(x^3)$.　　B. $o(x) \cdot o(x^2) = o(x^3)$.

C. $o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$.　　D. $o(x) + o(x^2) = o(x^2)$.

2. 函数 $f(x) = \dfrac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为

A. 0.　　B. 1.　　C. 2.　　D. 3.

3. 设 D_k 是圆域 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ 位于第 k 象限的部分,记 $I_k = \iint\limits_{D_k} (y - x)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,$(k = 1,2,3,4)$,则

A. $I_1 > 0$.　　B. $I_2 > 0$.　　C. $I_3 > 0$.　　D. $I_4 > 0$.

4. 设 $\{a_n\}$ 为正项数列,下列选项正确的是

A. 若 $a_n > a_{n+1}$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛.

B. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛,则 $a_n > a_{n+1}$.

C. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,则存在常数 $p > 1$,使 $\lim\limits_{n\to\infty} n^p a_n$ 存在.

D. 若存在常数 $p > 1$,使 $\lim\limits_{n\to\infty} n^p a_n$ 存在,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

5. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵,若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C}$,且 $\boldsymbol{B}$ 可逆,则

A. 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组等价.

B. 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价.

C. 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价.

D. 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价.

6. 矩阵$\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & b & a\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$相似的充分必要条件为

A. $a=0,b=2$.　　B. $a=0,b$ 为任意常数.

C. $a=2,b=0$.　　D. $a=2,b$ 为任意常数.

7. 设 X_1,X_2,X_3 是随机变量,且 $X_1\sim N(0,1),X_2\sim N(0,2^2),X_3\sim N(5,3^2)$, $p_i=P\{-2\leqslant X_i\leqslant 2\}\ (i=1,2,3)$,则

A. $p_1>p_2>p_3$.　　B. $p_2>p_1>p_3$.

C. $p_3>p_1>p_2$.　　D. $p_1>p_3>p_2$.

8. 设随机变量 X 和 Y 相互独立,且 X 和 Y 的概率分布分别为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

则 $P\{X+Y=2\}=$

A. $\frac{1}{12}$.　　B. $\frac{1}{8}$.　　C. $\frac{1}{6}$.　　D. $\frac{1}{2}$.

二、填空题:9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

9. 设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=x^2-x$ 在点(1,0)处有公共切线,则$\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\frac{n}{n+2}\right)=$________.

10. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程$(z+y)^x=xy$ 确定,则$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=$________.

11. $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=$________.

12. 微分方程 $y''-y'+\frac{1}{4}y=0$ 的通解为 $y=$________.

13. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵,$|\boldsymbol{A}|$为$\boldsymbol{A}$ 的行列式,A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式,若 $a_{ij}+A_{ij}=0(i,j=1,2,3)$,则$|\boldsymbol{A}|=$________.

14. 设随机变量 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$,则 $E(X\mathrm{e}^{2X})=$________.

三、解答题:15 ~ 23 小题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.(本题满分 10 分)

当 $x\to 0$ 时,$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$ 与ax^n为等价无穷小量,求 n 与 a 的值.

16.(本题满分 10 分)

设 D 是由曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$,直线 $x=a(a>0)$ 及 x 轴所围成的平面图形,V_x,V_y 分别是 D 绕 x 轴,y 轴旋转一周所得旋转体的体积,若 $V_y=10V_x$,求 a 的值.

17.(本题满分 10 分)

设平面区域 D 由直线 $x=3y,y=3x$ 及 $x+y=8$ 围成,计算 $\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

18.(本题满分 10 分)

设生产某产品的固定成本为 60 000 元,可变成本为 20 元/件,价格函数为 $P=60-\frac{Q}{1\,000}$,(P 是单价,单位:元,Q 是销量,单位:件),已知产销平衡,求:

(1) 该商品的边际利润;

(2) 当 $P=50$ 时的边际利润,并解释其经济意义;

(3) 使得利润最大的定价 P.

19.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$上可导,$f(0)=0$,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$,证明:

(1) 存在 $a>0$,使得 $f(a)=1$;

(2) 对(1)中的 a,存在 $\xi\in(0,a)$,使得 $f'(\xi)=\frac{1}{a}$.

考研派之家公众号，回复“考研真题”可领取专业课真题

20.（本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$，当 a,b 为何值时，存在矩阵 C 使得 $AC-CA=B$，并求所有矩阵 C.

21.（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$，记

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}.$$

(1) 证明：二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$；

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量，证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

22.（本题满分 11 分）

设 (X,Y) 是二维随机变量，X 的边缘概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 在给定 $X=x(0<x<1)$ 的条件下，Y 的条件概率密度为 $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{3y^2}{x^3}, & 0<y<x,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

(1) 求 (X,Y) 的概率密度 $f(x,y)$；

(2) 求 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)$；

(3) 求 $P\{X>2Y\}$.

23.（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}}, & x>0,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 其中 θ 为未知参数且大于零，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求 θ 的矩估计量；

(2) 求 θ 的最大似然估计量.

考研派之家公众号，回复“考研真题”可领取专业课真题

2013 年数学(三)答案解析

一、选择题

1.【答案】D

【解析】D 选项举出反例如下：

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x^3}{x^2}=1\neq 0$，因此 $o(x)+o(x^2)\neq o(x^2)$. 事实上，$o(x)+o(x^2)=o(x)$.

2.【答案】C

【解析】函数 $f(x)$ 的所有间断点为 $x=-1,x=0,x=1$.

$$\lim_{x\to -1}\frac{(-x)^x-1}{x(x+1)\ln(-x)}=\lim_{x\to -1}\frac{e^{x\ln(-x)}-1}{x(x+1)\ln(-x)}=\lim_{x\to -1}\frac{x\ln(-x)}{x(x+1)\ln(-x)}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{1+x}=\infty,$$

因此，$x=-1$ 是无穷间断点，不是可去间断点.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^x-1}{x(x+1)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{e^{x\ln x}-1}{x(x+1)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x(x+1)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2},$$

因此，$x=1$ 是可去间断点.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^x-1}{x(x+1)\ln x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x\ln x}-1}{x(x+1)\ln x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\ln x}{x(x+1)\ln x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)^x-1}{x(x+1)\ln(-x)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{x\ln(-x)}-1}{x(x+1)\ln(-x)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x\ln(-x)}{x(x+1)\ln(-x)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x+1}=1,$$

因此，$x=0$ 是可去间断点.

3.【答案】B

【解析】D_1,D_3 关于直线 $y=x$ 对称，由轮换对称性得 $I_1=0,I_3=0$；

在 D_2 上，$y-x\geqslant 0$ 且 $y-x$ 不恒等于零，所以 $I_2=\iint\limits_{D_2}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0$，

在 D_4 上，$y-x\leqslant 0$ 且 $y-x$ 不恒等于零，所以 $I_4=\iint\limits_{D_4}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<0$.

4.【答案】D

【解析】对于交错级数，莱布尼茨判别法需要满足两个条件：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\{a_n\}$ 单调递减，因此 A 选项错误.

对于收敛的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 而言，其通项不一定单调递减到 0，也可以震荡收敛于 0，因此 B 选项错误.

因为当 $p>1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 收敛，若 $\lim\limits_{n\to\infty}n^p a_n$ 存在，则由比较判别法可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，但反之不一定成立，因此 C 选项错误，D 选项正确.

考研派之家公众号，回复“考研真题”可领取专业课真题

5.【答案】B

【解析】右乘可逆矩阵相当于对矩阵的列向量作相应变换，因此矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价.

6.【答案】B

【解析】令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，

由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，又矩阵 $\boldsymbol{B}$ 已为对角矩阵，因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相似的充要条件是两矩阵特征值相等. 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $2,b,0$，经计算矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda(\lambda-2)(\lambda-b)-2a^2\lambda$.

若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则 $f(2)=0,f(b)=0,f(0)=0$，解得 $a=0$，b 为任意常数.

7.【答案】A

【解析】标准正态分布 $N(0,1)$ 的分布函数为 $\varphi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.

则 $P\{a\leqslant X\leqslant b\}=\varphi(b)-\varphi(a)=\int_a^b\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$，随 $b-a$ 的值增加而增加.

由 $X_2\sim N(0,2^2)$，$X_3\sim N(5,3^2)$，可得 $\frac{X_2}{2}\sim N(0,1)$，$\frac{X_3-5}{3}\sim N(0,1)$，因此有

$$p_1=\varphi(2)-\varphi(-2),p_2=\varphi(1)-\varphi(-1),p_3=\varphi(-1)-\varphi\left(-\frac{7}{3}\right),$$

由此可得 $p_1>p_2>p_3$.

8.【答案】C

【解析】由题意可得

$$P\{X+Y=2\}=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=2,Y=0\}+P\{X=3,Y=-1\},$$

由于 X,Y 相互独立，则

$$P\{X+Y=2\}=P\{X=1\}P\{Y=1\}+P\{X=2\}P\{Y=0\}+P\{X=3\}P\{Y=-1\}=\frac{1}{6}.$$

二、填空题

9.【答案】-2

【解析】由题意可得 $f(1)=0$，且 $f'(1)=y'|_{x=1}=(2x-1)|_{x=1}=1$.

$$\text{而}\lim_{n\to\infty}nf\left(\frac{n}{n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{n}{n+2}\right)-f(1)}{\frac{n}{n+2}-1}\cdot n\cdot\left(\frac{n}{n+2}-1\right),$$

考研派之家公众号，回复“考研真题”可领取专业课真题

由导数的定义可知$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f\left(\dfrac{n}{n+2}\right)-f(1)}{\dfrac{n}{n+2}-1}=f'(1)=1$，

因此$\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\dfrac{n}{n+2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\left(\dfrac{n}{n+2}-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-2n}{n+2}=-2$.

10.【答案】$2-2\ln 2$

【解析】将$(1,2)$代入方程$(z+y)^x=xy$中，解得$z=0$.

方程两边同时取对数得$x\ln(z+y)=\ln x+\ln y$，

两边再同时对x求导得$\ln(z+y)+\dfrac{x}{z+y}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{x}$，

将$(1,2,0)$代入其中得$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=2-2\ln 2$.

11.【答案】$\ln 2$

【解析】利用分部积分公式：

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx=-\int_1^{+\infty}\ln x\,d\left(\frac{1}{1+x}\right)=-\ln x\cdot\left.\frac{1}{1+x}\right|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)}dx$$

$$=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(x+1)}dx=\ln\left.\frac{x}{1+x}\right|_1^{+\infty}=\ln 2.$$

12.【答案】$(C_1+C_2x)e^{\frac{1}{2}x}$（$C_1,C_2$为任意常数）

【解析】微分方程$y''-y'+\dfrac{1}{4}y=0$的特征方程为$\lambda^2-\lambda+\dfrac{1}{4}=0$，解得其特征根为

$\lambda_1=\lambda_2=\dfrac{1}{2}$，因此该微分方程的通解为$y=(C_1+C_2x)e^{\frac{1}{2}x}$（$C_1,C_2$为任意常数）.

13.【答案】-1

【解析】由公式$A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$，可得$|A^*|=|A|^2$. 由$a_{ij}=-A_{ij}$可得$A^T=-A^*$，两边取行列式可得$|A|=(-1)^3|A|^2$，即得$|A|=0$或-1.

由于矩阵A为非零矩阵，因此至少存在一个非零元素，不妨设$a_{11}\neq 0$.

将矩阵按第1行展开得$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=-a_{11}^2-a_{12}^2-a_{13}^2<0$，

因此$|A|=-1$.

14.【答案】$2e^2$

【解析】由期望的计算公式可知，

$$E(Xe^{2X})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x\,e^{2x-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{e^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x\,e^{\frac{-(x-2)^2}{2}}dx$$

$$=\frac{e^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-2)e^{\frac{-(x-2)^2}{2}}d(x-2)+\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}d(x-2)=2e^2.$$

考研派之家公众号，回复“考研真题”可领取专业课真题

三、解答题

15.【解析】由题知

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{ax^n}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left[1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right]\left[1-\frac{4x^2}{2}+o(x^2)\right]\left[1-\frac{9x^2}{2}+o(x^2)\right]}{ax^n}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{7x^2+o(x^2)}{ax^n},$$

故 $a=7,n=2$.

16.【解析】旋转体的体积

$$V_x=\int_0^a\pi(x^{\frac{1}{3}})^2\mathrm{d}x=\int_0^a\pi x^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}x=\frac{3}{5}\pi a^{\frac{5}{3}},$$

$$V_y=\pi a^2\cdot a^{\frac{1}{3}}-\int_0^{a^{\frac{1}{3}}}\pi(y^3)^2\mathrm{d}y=\pi a^{\frac{7}{3}}-\frac{1}{7}\pi a^{\frac{7}{3}}=\frac{6}{7}\pi a^{\frac{7}{3}}.$$

由 $V_y=10V_x$，知 $a=7\sqrt{7}$.

17.【解析】$\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\int_{\frac{x}{3}}^{3x}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x+\int_2^6\int_{\frac{x}{3}}^{8-x}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x$

$$=\int_0^2\frac{8}{3}x^3\mathrm{d}x+\int_2^6x^2\left(8-\frac{4}{3}x\right)\mathrm{d}x=\frac{416}{3}.$$

18.【解析】(1) 总利益 $R=PQ=60Q-\frac{Q^2}{1\ 000}$，总成本 $C=60\ 000+20Q$. 故利润为

$$L(Q)=R-C=40Q-\frac{Q^2}{1\ 000}-60\ 000.$$

边际利润为

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}Q}=-\frac{Q}{500}+40.$$

(2) 由题知 $Q(P)=1\ 000(60-P)$，当 $P=50$ 时，$Q(50)=10\ 000$.

故边际利润 $\left.\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}Q}\right|_{Q=10\ 000}=20$，其经济意义为：当 $P=50$ 时，销售第 10 001 件商品可获利润 20 元.

(3) 令 $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}Q}=0$，解得 $Q=20\ 000$，此时 $P(Q)=60-\frac{20\ 000}{1\ 000}=40$，又 $\frac{\mathrm{d}^2L}{\mathrm{d}Q^2}=-\frac{1}{500}<0$，

故定价为 40 元时，利润最大.

19.【解析】令 $g(x)=f(x)-1$. 由题可知 $g(0)=-1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=1>0$，故存在 $a>0$，使得 $g(a)=0$，即 $f(a)=1$.

(2) 由拉格朗日中值定理知，存在 $\xi\in(0,a)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=\frac{1}{a}.$$

考研派之家公众号，回复“考研真题”可领取专业课真题

20.【解析】不妨设 $C=\begin{pmatrix}c_1 & c_2\\ c_3 & c_4\end{pmatrix}$，则

$$AC-CA=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1 & c_2\\ c_3 & c_4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}c_1 & c_2\\ c_3 & c_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ac_3-c_2 & c_2+ac_4-ac_1\\ c_1-c_3-c_4 & c_2-ac_3\end{pmatrix}.$$

因此有 $\begin{cases}ac_3-c_2=0,\\ c_2+ac_4-ac_1=1,\\ c_1-c_3-c_4=1,\\ c_2-ac_3=b.\end{cases}$

记 $P=\begin{bmatrix}0 & -1 & a & 0\\ -a & 1 & 0 & a\\ 1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -a & 0\end{bmatrix}$，$X=\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\\ c_4\end{bmatrix}$，$D=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\\ b\end{bmatrix}$. 即转换为求解方程 $PX=D$.

$$(P,D)=\left[\begin{array}{cccc:c}0 & -1 & a & 0 & 0\\ -a & 1 & 0 & a & 1\\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & b\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cccc:c}0 & -1 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & -a & 0 & 1+a\\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & b\end{array}\right]$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{cccc:c}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b\end{array}\right],$$

当 $\begin{cases}1+a=0,\\ b=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a=-1,\\ b=0\end{cases}$ 时，$r(P)=r(P,D)=2<4$，此时方程有无穷多解，通解为

$$X=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\ (k_1,k_2 \text{ 为任意常数}).$$

21.【解析】(1) 由题知

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}+(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}(b_1,b_2,b_3)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

$$=(x_1,x_2,x_3)(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{T}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{T})\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},$$

考研派之家公众号，回复“考研真题”可领取专业课真题

又 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 是对称矩阵，因此二次型 f 对应的矩阵是 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$.

(2) 作变换 $y_1=(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X},y_2=(b_1,b_2,b_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$.

因为 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为相互正交的单位向量，故该变换为正交变换且 f 对应的标准形为 $f=2y_1^2+y_2^2$.

22.【解析】(1) $f(x,y)=f_{Y|X}(y\mid x)f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{9y^2}{x}, & 0<x<1,0<y<x,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

(2) 当 $0<x<1,0<y<x$ 时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_y^1\dfrac{9y^2}{x}\mathrm{d}x=-9y^2\ln y$.

故 Y 的边缘概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}-9y^2\ln y, & 0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(3) $P\{X>2Y\}=\int_0^1\int_0^{\frac{x}{2}}f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_0^1\int_0^{\frac{x}{2}}\dfrac{9y^2}{x}\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_0^1\dfrac{3}{8}x^2\mathrm{d}x=\dfrac{1}{8}$.

23.【解析】(1) $E(X)=\int_0^{+\infty}x\,\dfrac{\theta^2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}y^2\mathrm{e}^{-y}\theta\,\dfrac{1}{y^2}\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\theta\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\theta$,

故 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$.

(2) 似然函数为 $L(\theta)=\dfrac{\theta^{2n}}{\prod\limits_{i=1}^{n}x_i^3}\mathrm{e}^{-\theta\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$,

取对数得

$$\ln L(\theta)=2n\ln\theta-3\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\sum_{i=1}^{n}\frac{\theta}{x_i}.$$

由 $0=\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\dfrac{2n}{\theta}-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i}$ 得，θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=\dfrac{2n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{X_i}}$.