2013 年全国硕士研究生招生考试

数　学（一）

（科目代码：301）

一、选择题：1 ～ 8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

1. 已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=c$，其中 k,c 为常数，且 $c\neq 0$，则

A. $k=2,c=-\dfrac{1}{2}$.　　B. $k=2,c=\dfrac{1}{2}$.

C. $k=3,c=-\dfrac{1}{3}$.　　D. $k=3,c=\dfrac{1}{3}$.

2. 曲面 $x^2+\cos(xy)+yz+x=0$ 在点 $(0,1,-1)$ 处的切平面方程为

A. $x-y+z=-2$.　　B. $x+y+z=0$.

C. $x-2y+z=-3$.　　D. $x-y-z=0$.

3. 设 $f(x)=\left|x-\dfrac{1}{2}\right|$，$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,dx\ (n=1,2,\cdots)$，令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$，则 $S\left(-\dfrac{9}{4}\right)=$

A. $\dfrac{3}{4}$.　　B. $\dfrac{1}{4}$.　　C. $-\dfrac{1}{4}$.　　D. $-\dfrac{3}{4}$.

4. 设 $L_1:x^2+y^2=1$，$L_2:x^2+y^2=2$，$L_3:x^2+2y^2=2$，$L_4:2x^2+y^2=2$ 为四条逆时针的平面曲线，记 $I_i=\oint_{L_i}\left(y+\dfrac{y^3}{6}\right)dx+\left(2x-\dfrac{x^3}{3}\right)dy\ (i=1,2,3,4)$，则 $\max\{I_1,I_2,I_3,I_4\}=$

A. I_1.　　B. I_2.　　C. I_3.　　D. I_4.

5. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，且 $\boldsymbol{B}$ 可逆，则

A. 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组等价.

B. 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价.

C. 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价.

D. 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价.

6. 矩阵$\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & b & a\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$相似的充分必要条件为

A. $a=0,b=2$.　　　　B. $a=0$，b 为任意常数.

C. $a=2,b=0$.　　　　D. $a=2$，b 为任意常数.

7. 设 X_1,X_2,X_3 是随机变量，且 $X_1\sim N(0,1)$，$X_2\sim N(0,2^2)$，$X_3\sim N(5,3^2)$，$p_i=P\{-2\leqslant X_i\leqslant 2\}(i=1,2,3)$，则

A. $p_1>p_2>p_3$.　　　　B. $p_2>p_1>p_3$.

C. $p_3>p_1>p_2$.　　　　D. $p_1>p_3>p_2$.

8. 设随机变量 $X\sim t(n)$，$Y\sim F(1,n)$，给定 $\alpha(0<\alpha<0.5)$，常数 c 满足 $P\{X>c\}=\alpha$，则 $P\{Y>c^2\}=$

A. α.　　　　B. $1-\alpha$.　　　　C. 2α.　　　　D. $1-2\alpha$.

二、填空题：9 ～ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

9. 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ 确定，则$\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)-1\right]=$________.

10. 已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x}$，$y_2=e^{x}-xe^{2x}$，$y_3=-xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解，则该方程的通解为 $y=$________.

11. 设$\begin{cases}x=\sin t,\\ y=t\sin t+\cos t\end{cases}$（$t$ 为参数），则$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$________.

12. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx=$________.

13. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵，$|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，若 $a_{ij}+A_{ij}=0(i,j=1,2,3)$，则 $|\boldsymbol{A}|=$________.

14. 设随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布，a 为常数且大于零，则 $P\{Y\leqslant a+1\mid Y>a\}=$

________.

三、解答题：15 ～ 23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本题满分 10 分）

计算$\displaystyle\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$，其中 $f(x)=\displaystyle\int_1^x\frac{\ln(t+1)}{t}dt$.

16.（本题满分 10 分）

设数列 $\{a_n\}$ 满足条件：$a_0=3, a_1=1, a_{n-2}-n(n-1)a_n=0(n\geqslant 2)$，$S(x)$ 是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数.

(1) 证明：$S''(x)-S(x)=0$；

(2) 求 $S(x)$ 的表达式.

17.（本题满分 10 分）

求函数 $f(x,y)=\left(y+\dfrac{x^3}{3}\right)e^{x+y}$ 的极值.

18.（本题满分 10 分）

设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(1)=1$，证明：

(1) 存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$；

(2) 存在 $\eta\in(-1,1)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

19.（本题满分 10 分）

设直线 L 过 $A(1,0,0)$，$B(0,1,1)$ 两点，将 L 绕 z 轴旋转一周得到曲面 Σ，Σ 与平面 $z=0$，$z=2$ 所围成的立体为 Ω.

(1) 求曲面 Σ 的方程；

(2) 求 Ω 的形心坐标.

20.（本题满分 11 分）

设$A=\begin{pmatrix}1 & a\\1 & 0\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & b\end{pmatrix}$,当$a$,$b$为何值时,存在矩阵$C$使得$AC-CA=B$,并求所有矩阵$C$.

21.（本题满分 11 分）

设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$,记

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}.$$

(1) 证明:二次型f对应的矩阵为$2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$;

(2) 若$\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{\beta}$正交且均为单位向量,证明:f在正交变换下的标准形为$2y_1^2+y_2^2$.

22.（本题满分 11 分）

设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}x^2, & 0<x<3,\\0, & \text{其他},\end{cases}$令随机变量$Y=\begin{cases}2, & X\leqslant 1,\\X, & 1<X<2,\\1, & X\geqslant 2.\end{cases}$

(1) 求Y的分布函数;

(2) 求概率$P\{X\leqslant Y\}$.

23.（本题满分 11 分）

设总体X的概率密度为$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}}, & x>0,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$其中$\theta$为未知参数且大于零,$X_1$,$X_2$,…,$X_n$为来自总体$X$的简单随机样本.

(1) 求θ的矩估计量;

(2) 求θ的最大似然估计量.

2013 年数学(一)答案解析

一、选择题

1.【答案】D

【解析】由洛必达法则，可得$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{kx^{k-1}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{1+x^2}}{kx^{k-3}}=c$，

若极限存在且 $c\neq0$，那么有 $k=3,c=\dfrac{1}{3}$.

2.【答案】A

【解析】令 $F(x,y,z)=x^2+\cos(xy)+yz+x$，曲线的切平面公式为

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0.$$

经计算得

$F_x(x,y,z)|_{(0,1,-1)}=[2x-y\sin(xy)+1]|_{(0,1,-1)}=1$，

$F_y(x,y,z)|_{(0,1,-1)}=[-x\sin(xy)+z]|_{(0,1,-1)}=-1$，

$F_z(x,y,z)|_{(0,1,-1)}=y|_{(0,1,-1)}=1$，

因此，曲面在$(0,1,-1)$处的切平面为 $x-(y-1)+(z+1)=0$，即 $x-y+z=-2$.

3.【答案】C

【解析】将 $f(x)$ 延拓为周期为 2 的奇函数，再将其进行傅里叶展开得 $f(x)$ 的正弦级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$，其中 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,dx\,(n=1,2,\cdots)$，那么由题意可知 $S(x)$ 为其部分和. 由于 $S\left(-\dfrac{9}{4}\right)=S\left(-2-\dfrac{1}{4}\right)=S\left(-\dfrac{1}{4}\right)=-S\left(\dfrac{1}{4}\right)$，且 $x=\dfrac{1}{4}$ 为 $f(x)$ 的连续点，因此 $S\left(-\dfrac{9}{4}\right)=-f\left(\dfrac{1}{4}\right)=-\dfrac{1}{4}$.

4.【答案】D

【解析】由格林公式可得

$$\oint_{L_i}\left(y+\frac{y^3}{6}\right)dx+\left(2x-\frac{x^3}{3}\right)dy=\iint\limits_{D_i}\left(1-x^2-\frac{1}{2}y^2\right)dx\,dy\,(i=1,2,3,4),$$

其中 D_i 为封闭曲线 L_i 所围成的区域.

经计算得 $I_1=\iint\limits_{D_1}\left(1-x^2-\dfrac{1}{2}y^2\right)dx\,dy=\iint\limits_{D_1}dx\,dy-\iint\limits_{D_1}x^2dx\,dy-\dfrac{1}{2}\iint\limits_{D_1}y^2dx\,dy$

$$=\pi-\frac{3}{2}\iint\limits_{D_1}x^2dx\,dy=\pi-\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3\cos^2\theta\,dr=\frac{5}{8}\pi;$$

同理得 $I_2=\iint\limits_{D_2}\left(1-x^2-\dfrac{1}{2}y^2\right)dx\,dy=2\pi-\dfrac{3}{2}\iint\limits_{D_2}x^2dx\,dy$

$$=2\pi-\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^3\cos^2\theta\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}.$$

$I_3=\frac{3\sqrt{2}}{8}\pi, I_4=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$，经比较知 I_4 最大.

5.【答案】B

【解析】右乘可逆矩阵相当于对矩阵的列向量作相应变换，因此矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价.

6.【答案】B

【解析】令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，

由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，又矩阵 $\boldsymbol{B}$ 已为对角矩阵，因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相似的充要条件是两矩阵特征值相等. 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 特征值为 $2,b,0$，经计算矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda(\lambda-2)(\lambda-b)-2a^2\lambda$.

若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则 $f(2)=0,f(b)=0,f(0)=0$，解得 $a=0$，b 为任意常数.

7.【答案】A

【解析】标准正态分布 $N(0,1)$ 的分布函数为 $\varphi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$.

则 $P\{a\leqslant x\leqslant b\}=\varphi(b)-\varphi(a)=\int_a^b\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$，随 $b-a$ 的值增加而增加.

由 $X_2\sim N(0,2^2), X_3\sim N(5,3^2)$，可得 $\frac{X_2}{2}\sim N(0,1), \frac{X_3-5}{3}\sim N(0,1)$，因此有

$$p_1=\varphi(2)-\varphi(-2), p_2=\varphi(1)-\varphi(-1), p_3=\varphi(-1)-\varphi\left(-\frac{7}{3}\right),$$

由此可得 $p_1>p_2>p_3$.

8.【答案】C

【解析】$X\sim t(n)$，则 $X^2\sim f(1,n)$.

$P\{X>c\}=\alpha$，那么由 t 分布的对称性可知 $P\{X<-c\}=\alpha$，因此 $P\{X^2>c^2\}=2\alpha$.

由于 X^2 与 Y 同分布，因此 $P\{Y>c^2\}=2\alpha$.

二、填空题

9.【答案】1

【解析】将 $x=0$ 代入 $y-x=e^{x(1-y)}$ 得 $f(0)=1$.

$\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)-1}{\frac{1}{n}}$，因此由导数的定义可得 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]=f'(0)$.

等式 $y-x=e^{x(1-y)}$ 两边同时对 x 求导，得 $y'-1=e^{x(1-y)}(1-y-xy')$，

代入 $x=0,y=1$，得 $y'|_{x=0}=f'(0)=1$.

10.【答案】$C_1e^x+C_2e^{3x}-xe^{2x}$（C_1,C_2 为任意常数）

【解析】设 y_1,y_2,y_3 为二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 的解，

则由线性微分方程解的结构可知 y_1-y_3,y_2-y_3 为对应的齐次线性微分方程的解，

即 e^x,e^{3x} 为 $y''+py'+qy=0$ 的两个线性无关解，

因此对应齐次线性微分方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{3x}$（C_1,C_2 为任意常数），

因此 $y=C_1e^x+C_2e^{3x}-xe^{2x}$（$C_1,C_2$ 为任意常数）为微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 的通解.

11.【答案】$\sqrt{2}$

【解析】$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\sin t+t\cos t-\sin t}{\cos t}=t.$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{\cos t},$$

将 $t=\frac{\pi}{4}$ 代入得 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}.$

12.【答案】$\ln 2$

【解析】利用分部积分公式

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx=-\int_1^{+\infty}\ln x\,d\left(\frac{1}{1+x}\right)=-\ln x\cdot\frac{1}{1+x}\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)}dx$$

$$=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(x+1)}dx=\ln\frac{x}{1+x}\Big|_1^{+\infty}=\ln 2.$$

13.【答案】-1

【解析】由公式 $A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$，可得 $|A^*|=|A|^2$. 由 $a_{ij}=-A_{ij}$，可得 $A^T=-A^*$，两边取行列式可得 $|A|=(-1)^3|A|^2$，即得 $|A|=0$ 或 -1.

由于矩阵 A 为非零矩阵，因此至少存在一个非零元素，不妨设 $a_{11}\neq 0$.

将矩阵按第 1 行展开得 $|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=-a_{11}^2-a_{12}^2-a_{13}^2<0$，

因此 $|A|=-1$.

14.【答案】$1-e^{-1}$

【解析】随机变量 Y 的概率密度函数为 $f(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 因此

$$P\{Y>a\}=\int_a^{+\infty}e^{-y}dy=e^{-a},P\{a<Y\leqslant a+1\}=\int_a^{a+1}e^{-y}dy=e^{-a}-e^{-a-1}.$$

由条件概率公式，$P\{Y\leqslant a+1|Y>a\}=\dfrac{P\{a<Y\leqslant a+1\}}{P\{Y>a\}}=\dfrac{e^{-a}-e^{-a-1}}{e^{-a}}=1-e^{-1}$.

三、解答题

15.【解析】原式$=-\int_0^1\int_x^1\dfrac{1}{\sqrt{x}}\dfrac{\ln(t+1)}{t}\mathrm{d}t\mathrm{d}x=-\int_0^1\int_0^t\dfrac{1}{\sqrt{x}}\dfrac{\ln(t+1)}{t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t$

$$=-\int_0^1 2\sqrt{t}\,\frac{\ln(t+1)}{t}\mathrm{d}t=-\int_0^1 4\ln(t+1)\,\mathrm{d}(\sqrt{t})$$

$$=-4\left[\sqrt{t}\ln(t+1)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{\sqrt{t}}{1+t}\mathrm{d}t\right]=-4\ln 2+8\int_0^1\frac{\sqrt{t}}{1+t}\mathrm{d}t$$

$$=-4\ln 2+\int_0^1\frac{8u^2}{1+u^2}\mathrm{d}u=8-2\pi-4\ln 2.$$

16.(1)【证明】由题意可得 $a_n=\dfrac{1}{n(n-1)}a_{n-2}$，故 $a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n!}, & n\text{ 为奇数},\\ \dfrac{3}{n!}, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$

则
$$S''(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)''=\left(\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}\right)'=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=S(x),$$

所以 $S''(x)-S(x)=0$.

(2)【解析】由(1)知，特征方程为 $\lambda^2-1=0$. 因此特征值为 $\lambda=\pm1$. $S(x)$ 的通解为
$$S(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}.$$

由 $S(0)=a_0=3, S'(0)=a_1=1$ 可知 $\begin{cases}C_1=2,\\C_2=1,\end{cases}$ 故 $S(x)=2e^x+e^{-x}$.

17.【解析】由 $\begin{cases}0=f_x=\left(x^2+y+\dfrac{x^3}{3}\right)e^{x+y},\\ 0=f_y=\left(1+y+\dfrac{x^3}{3}\right)e^{x+y},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\ y=-\dfrac{4}{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-1,\\ y=-\dfrac{2}{3},\end{cases}$ 所以

$$\begin{cases}A_1=f_{xx}\Big|_{(1,-\frac{4}{3})}=\left(2x+2x^2+y+\dfrac{x^3}{3}\right)e^{x+y}\Big|_{(1,-\frac{4}{3})}=3e^{-\frac{1}{3}},\\ B_1=f_{xy}\Big|_{(1,-\frac{4}{3})}=\left(1+x^2+y+\dfrac{x^3}{3}\right)e^{x+y}\Big|_{(1,-\frac{4}{3})}=e^{-\frac{1}{3}},\\ C_1=f_{yy}\Big|_{(1,-\frac{4}{3})}=\left(2+y+\dfrac{x^3}{3}\right)e^{x+y}\Big|_{(1,-\frac{4}{3})}=e^{-\frac{1}{3}},\end{cases}$$

$$\begin{cases} A_2=f_{xx}\Big|_{(-1,-\frac{2}{3})}=\left(2x+2x^2+y+\dfrac{x^3}{3}\right)e^{x+y}\Big|_{(-1,-\frac{2}{3})}=-e^{-\frac{5}{3}}, \\ B_2=f_{xy}\Big|_{(-1,-\frac{2}{3})}=\left(1+x^2+y+\dfrac{x^3}{3}\right)e^{x+y}\Big|_{(-1,-\frac{2}{3})}=e^{-\frac{5}{3}}, \\ C_2=f_{yy}\Big|_{(-1,-\frac{2}{3})}=\left(2+y+\dfrac{x^3}{3}\right)e^{x+y}\Big|_{(-1,-\frac{2}{3})}=e^{-\frac{5}{3}}, \end{cases}$$

由 $A_1C_1-B_1^2>0, A_1>0$，得极小值 $f\left(1,-\dfrac{4}{3}\right)=-e^{-\frac{1}{3}}$；

因为 $A_2C_2-B_2^2<0$，故 $f\left(-1,-\dfrac{2}{3}\right)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值.

18.【证明】(1) $f(x)$ 为奇函数，故 $f(0)=0$. 由中值定理知，存在 $\xi\in(0,1)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=1.$$

(2) 令 $g(x)=e^x[f'(x)-1]$.

$f(x)$ 为奇函数，故 $f'(x)$ 为偶函数，因此

$$g(\xi)=g(-\xi)=0.$$

因此由中值定理知，存在 $\eta\in(-\xi,\xi)$，使得

$$g'(\eta)=0,$$

即 $e^\eta[f'(\eta)-1+f''(\eta)]=0$，因此有 $f'(\eta)+f''(\eta)=1$.

19.【解析】(1) 直线 L 的方向向量为 $\overrightarrow{BA}=(1,-1,-1)$，故直线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-1}.$$

设 $M(x,y,z)$ 为 Σ 上的任意一点，$M_0(x_0,y_0,z)$ 为 M 所在圆周与 L 的交点，则有

$$\begin{cases} \dfrac{x_0-1}{1}=\dfrac{y_0}{-1}=\dfrac{z}{-1}, \\ x_0^2+y_0^2=x^2+y^2, \end{cases}$$

因此得到曲面 Σ 的方程为 $x^2+y^2=2z^2-2z+1$.

(2) 令 $I=\iiint\limits_{\Omega}dV$，则 Ω 的形心坐标为 $\left(\dfrac{\iiint\limits_{\Omega}x\,dV}{I},\dfrac{\iiint\limits_{\Omega}y\,dV}{I},\dfrac{\iiint\limits_{\Omega}z\,dV}{I}\right)$. 旋转体 Ω 的体积为

$$I=\int_0^2\pi(2z^2-2z+1)\,dz=\frac{10}{3}\pi,$$

由对称性可知 $\iiint\limits_{\Omega}x\,dV=\iiint\limits_{\Omega}y\,dV=0$，$\iiint\limits_{\Omega}z\,dV=\int_0^2\pi z(2z^2-2z+1)\,dz=\dfrac{14}{3}\pi$，

故形心坐标为 $\left(0,0,\dfrac{7}{5}\right)$.

20.【解析】不妨设 $C=\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}$，则

$$AC-CA=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ac_3-c_2 & c_2+ac_4-ac_1 \\ c_1-c_3-c_4 & c_2-ac_3 \end{pmatrix},$$

因此有 $\begin{cases} ac_3-c_2=0, \\ c_2+ac_4-ac_1=1, \\ c_1-c_3-c_4=1, \\ c_2-ac_3=b. \end{cases}$

记 $P=\begin{bmatrix} 0 & -1 & a & 0 \\ -a & 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -a & 0 \end{bmatrix}$，$X=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$，$D=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ b \end{bmatrix}$，即转换为求解方程 $PX=D$.

$$(P,D)=\left[\begin{array}{cccc:c} 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c} 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 1+a \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 1+a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right],$$

当 $\begin{cases} 1+a=0, \\ b=0 \end{cases}$ 时，$r(P)=r(P,D)=2<4$，此时方程有无穷多解，通解为

$$X=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\ (k_1,k_2\text{ 为任意常数}).$$

故存在 $C=\begin{pmatrix} k_1+k_2+1 & -k_1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}$ (k_1,k_2 为任意常数)，使得 $AC-CA=B$.

21.【证明】(1) 由题知

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}+(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}(b_1,b_2,b_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$=(x_1,x_2,x_3)(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

又 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 是对称矩阵，因此二次型 f 对应的矩阵是 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$.

(2) 作变换 $y_1=(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$，$y_2=(b_1,b_2,b_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$. 因为 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为相互正交的单位向量，故该变换为正交变换且 f 对应的标准形为 $f=2y_1^2+y_2^2$.

22.【解析】(1) 当 $y<1$ 时，$P\{Y\leqslant y\}=0$；

当 $1\leqslant y<2$ 时，

$$P\{Y\leqslant y\}=P\{X\geqslant 2\}+P\{1<X<y\}=\int_2^3\frac{1}{9}x^2\mathrm{d}x+\int_1^y\frac{1}{9}x^2\mathrm{d}x=\frac{y^3+18}{27};$$

当 $y\geqslant 2$ 时，$P\{Y\leqslant y\}=1$，

故 Y 的分布函数为
$$F(y)=\begin{cases}0, & y<1,\\ \dfrac{y^3+18}{27}, & 1\leqslant y<2,\\ 1, & y\geqslant 2.\end{cases}$$

(2) $P\{X\leqslant Y\}=P\{X\leqslant Y,Y=1\}+P\{X\leqslant Y,1<Y<2\}+P\{X\leqslant Y,Y=2\}$，
由条件概率公式可得

$$P\{X\leqslant Y,Y=1\}=P\{X\leqslant Y|Y=1\}P\{Y=1\}=\int_0^1\frac{1}{9}x^2\mathrm{d}x\cdot\int_2^3\frac{1}{9}x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{27}\cdot\frac{19}{27}=\frac{19}{27^2};$$

$$P\{X\leqslant Y,1<Y<2\}=P\{X\leqslant Y|1<Y<2\}P\{1<Y<2\}=\int_1^2\frac{1}{9}x^2\mathrm{d}x=\frac{7}{27};$$

$$P\{X\leqslant Y,Y=2\}=P\{X\leqslant Y|Y=2\}P\{Y=2\}=\int_0^2\frac{1}{9}x^2\mathrm{d}x\cdot\int_0^1\frac{1}{9}x^2\mathrm{d}x=\frac{8}{27^2}.$$

因此，$P\{X\leqslant Y\}=\dfrac{19}{27^2}+\dfrac{7}{27}+\dfrac{8}{27^2}=\dfrac{8}{27}$.

23.【解析】(1) $E(X)=\displaystyle\int_0^{+\infty}x\,\frac{\theta^2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}y^2\mathrm{e}^{-y}\theta\,\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\theta\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\theta$，

故 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i$.

(2) 似然函数为 $L(\theta)=\dfrac{\theta^{2n}}{\prod\limits_{i=1}^{n}x_i^3}e^{-\theta\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$，

取对数得

$$\ln L(\theta)=2n\ln\theta-3\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\sum_{i=1}^{n}\frac{\theta}{x_i}.$$

由 $0=\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\dfrac{2n}{\theta}-\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}$ 得，θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=\dfrac{2n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{X_i}}$.