2012 年全国硕士研究生招生考试

数　学　（一）

（科目代码：301）

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

1．曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 渐近线的条数为

A．0．　　B．1．　　C．2．　　D．3．

2．设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $f'(0)=$

A．$(-1)^{n-1}(n-1)!$．　　B．$(-1)^n(n-1)!$．

C．$(-1)^{n-1}n!$．　　D．$(-1)^n n!$．

3．设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，那么下列命题正确的是

A．若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在，则函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微．

B．若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，则函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微．

C．若函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在．

D．若函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在．

4．设 $I_k=\int_0^{k\pi}e^{x^2}\sin x\,dx\ (k=1,2,3)$，则有

A．$I_1<I_2<I_3$．　　B．$I_3<I_2<I_1$．

C．$I_2<I_3<I_1$．　　D．$I_2<I_1<I_3$．

5．设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$，其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数，则下列向量组线性相关的是

A．$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$．　　B．$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$．　　C．$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$．　　D．$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$．

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{P}$ 为 3 阶可逆矩阵，且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，

$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$. 则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=$

A. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　B. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.　　C. $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.　　D. $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

7. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且分别服从参数为 1 与参数为 4 的指数分布，则 $P\{X<Y\}=$

A. $\frac{1}{5}$.　　B. $\frac{1}{3}$.　　C. $\frac{2}{3}$.　　D. $\frac{4}{5}$.

8. 将长度为 1 m 的木棒随机地截成两段，则两段长度的相关系数为

A. 1.　　B. $\frac{1}{2}$.　　C. $-\frac{1}{2}$.　　D. -1.

二、填空题：9 ～ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

9. 若函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2e^x$，则 $f(x)=$ ________.

10. $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,dx=$ ________.

11. $\mathbf{grad}\left(xy+\frac{z}{y}\right)\Big|_{(2,1,1)}=$ ________.

12. 设 $\Sigma=\{(x,y,z)\mid x+y+z=1,x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0\}$，则 $\iint\limits_{\Sigma} y^2\,dS=$ ________.

13. 设 $\boldsymbol{x}$ 为三维单位列向量，$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵，则矩阵 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ 的秩为 ________.

14. 设 A,B,C 是随机事件，A,C 互不相容，$P(AB)=\frac{1}{2}$，$P(C)=\frac{1}{3}$，则 $P(AB\mid\overline{C})=$ ________.

三、解答题：15 ～ 23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本题满分 10 分）

证明：$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\frac{x^2}{2}(-1<x<1)$.

16.（本题满分 10 分）

求函数 $f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

17.（本题满分 10 分）

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

18.（本题满分 10 分）

已知曲线 $L:\begin{cases}x=f(t),\\ y=\cos t\end{cases}\left(0\leqslant t<\dfrac{\pi}{2}\right)$，其中函数 $f(t)$ 具有连续导数且 $f(0)=0$，$f'(t)>0\left(0<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$. 若曲线 L 的切线与 x 轴的交点到切点的距离恒为 1，求函数 $f(t)$ 的表达式，并求以曲线 L 及 x 轴和 y 轴为边界的区域的面积.

19.（本题满分 10 分）

已知 L 是第一象限中从点 $(0,0)$ 沿圆周 $x^2+y^2=2x$ 到点 $(2,0)$，再沿圆周 $x^2+y^2=4$ 到点 $(0,2)$ 的曲线段，计算曲线积分 $I=\int_L 3x^2y\,\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\,\mathrm{d}y$.

20.（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$.

(1) 计算行列式 $|\boldsymbol{A}|$；

(2) 当实数 a 为何值时，方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解，并求其通解.

21.（本题满分 11 分）

已知 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^{T}(A^{T}A)X$ 的秩为 2.

(1) 求实数 a 的值；

(2) 求正交变换 $X=QY$ 将 f 化为标准形.

22.（本题满分 11 分）

设二维离散型随机变量 (X,Y) 的概率分布为

X	Y		
	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

(1) 求 $P\{X=2Y\}$；

(2) 求 $\mathrm{Cov}(X-Y,Y)$.

23.（本题满分 11 分）

设随机变量 X 与 Y 相互独立且分别服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 与 $N(\mu,2\sigma^2)$，其中 σ 是未知参数且 $\sigma>0$，设 $Z=X-Y$.

(1) 求 Z 的概率密度 $f(z;\sigma^2)$；

(2) 设 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 为来自总体 Z 的简单随机样本，求 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$；

(3) 证明：$\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量.

2012 年数学(一)答案解析

一、选择题

1.【答案】C

【解析】曲线的渐近线分为垂直渐近线，水平渐近线和斜渐近线三种.

由于$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\infty$，即 $x\to1$ 时，$y\to\infty$，因此曲线存在垂直渐近线 $x=1$；

由于$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=1$，即 $x\to\infty$ 时，$y\to1$，因此曲线存在水平渐近线 $y=1$；

但$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{x^2+x}{x^2-1}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x-1}=0$，因此曲线不存在斜渐近线. 故曲线只有 2 条渐近线.

2.【答案】A

【解析】经计算，有

$$f'(x)=e^x(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)+2e^{2x}(e^x-1)\cdots(e^{nx}-n)+\cdots+$$
$$ne^{nx}(e^x-1)\cdots(e^{(n-1)x}-n+1),$$

则 $f'(0)=(-1)\times\cdots\times(1-n)=(-1)^{n-1}(n-1)!$.

3.【答案】B

【解析】函数 $f(x,y)$ 在点(0,0) 处连续，若$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，则可得 $f(0,0)=0$.

因为$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在，故$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，

即得 $df(x,y)=0\cdot dx+0\cdot dy+o(\sqrt{x^2+y^2})$，

从而函数 $f(x,y)$ 在(0,0) 处可微.

4.【答案】D

【解析】$I_2-I_1=\int_\pi^{2\pi}e^{x^2}\sin x\,dx<0$，则 $I_2<I_1$；$I_3-I_2=\int_{2\pi}^{3\pi}e^{x^2}\sin x\,dx>0$，则 $I_3>I_2$.

现比较 I_1,I_3：

$$I_3-I_1=\int_\pi^{3\pi}e^{x^2}\sin x\,dx=\int_\pi^{2\pi}e^{x^2}\sin x\,dx+\int_{2\pi}^{3\pi}e^{x^2}\sin x\,dx$$
$$=\int_\pi^{2\pi}e^{x^2}\sin x\,dx-\int_\pi^{2\pi}e^{(x+\pi)^2}\sin x\,dx$$
$$=\int_\pi^{2\pi}[e^{x^2}-e^{(x+\pi)^2}]\sin x\,dx>0,$$

因此 $I_1<I_3$. 综上，有 $I_2<I_1<I_3$.

5.【答案】C

【解析】由行列式的性质可知，若矩阵行列式的值等于 0，则矩阵的列向量组线性相关. 从而有 $|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)|=-c_1$，$|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4)|=c_1$，$|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)|=0$，$|(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)|=-c_3-c_4$，因此 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关.

6.【答案】B

【解析】由题意可得 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{PB}$，因此 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{APB}$.

经计算，有 $\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，故 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{B}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

7.【答案】A

【解析】服从参数为 λ 的指数分布的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

由于随机变量 X,Y 相互独立，因此 X,Y 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}4e^{-(x+4y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

那么 $P\{X<Y\}=\iint\limits_{x<y}4e^{-(x+4y)}\,dx\,dy=\int_0^{+\infty}4e^{-4y}dy\int_0^y e^{-x}dx=\int_0^{+\infty}4e^{-4y}(1-e^{-y})\,dy=\dfrac{1}{5}$.

8.【答案】D

【解析】设这两段木棒的长度分别为 X,Y，显然 X,Y 为随机变量且 $X+Y=1$，因此 X,Y 呈负线性关系，故两段木棒的相关系数为 -1.

二、填空题

9.【答案】e^x

【解析】由 $f''(x)+f(x)=2e^x$ 得 $f''(x)=-f(x)+2e^x$，

代入 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 中，得 $f'(x)-3f(x)=-2e^x$，

通解为 $f(x)=e^{-\int(-3)dx}\left[\int(-2e^x)e^{\int(-3)dx}dx+C\right]=e^x+Ce^{3x}$，

故 $f'(x)=e^x+3Ce^{3x}$，$f''(x)=e^x+9Ce^{3x}$，代入 $f''(x)+f(x)=2e^x$，得

$$2e^x+10Ce^{3x}=2e^x,$$

解得 $C=0$，从而 $f(x)=e^x$.

10.【答案】$\dfrac{\pi}{2}$

【解析】$\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,dx=\int_0^2 x\sqrt{-(x-1)^2+1}\,dx$

$$=\int_0^2(x-1)\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx+\int_0^2\sqrt{1-(x-1)^2}$$

$$\xlongequal{t=x-1}\int_{-1}^{1}t\sqrt{1-t^2}\,dt+\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt$$

$$=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt=\frac{\pi}{2}.\text{（相当于半个单位圆的面积）}$$

11.【答案】$\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$

【解析】由 $\mathbf{grad}\,f(x,y,z)=\left\{\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right\}$，得 $\mathbf{grad}\left(xy+\frac{z}{y}\right)=\left\{y,x-\frac{z}{y^2},\frac{1}{y}\right\}$，

因此 $\mathbf{grad}\left(xy+\frac{z}{y}\right)\bigg|_{(2,1,1)}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

12.【答案】$\frac{\sqrt{3}}{12}$

【解析】将第一曲面积分转化为二重积分.

Σ 在 xOy 平面上的投影区域为 $D=\{(x,y)\mid x+y\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$，

且 $dS=\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}\,dx\,dy$，其中 $z(x,y)=1-x-y$，

因此有
$$\iint_{\Sigma}y^2\,dS=\iint_{D}\sqrt{3}y^2\,dx\,dy=\frac{\sqrt{3}}{12}.$$

13.【答案】2

【解析】$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$有三种情形：$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，其秩均为 2.

14.【答案】$\frac{3}{4}$

【解析】由条件概率公式有 $P(AB\mid\overline{C})=\frac{P(AB\overline{C})}{P(\overline{C})}$.

而 $P(AB\overline{C})=P(AB)-P(ABC)$，由于 A,C 互不相容，那么 $P(ABC)=0$，

因此 $P(AB\overline{C})=\frac{1}{2}$，从而 $P(AB\mid\overline{C})=\frac{3}{4}$.

三、解答题

15.【解析】令 $h(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}$，则 $h(x)$ 是偶函数，且 $h(0)=0$，因此只需证明 $h(x)>0$ 对任意 $x\in(0,1)$ 成立.

因为 $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$，因此对任意 $x\in(0,1)$，有 $\cos x>1-\frac{x^2}{2}$.

令 $g(x)=1+x-(1-x)e^x,x\in(0,1)$，

故 $g'(x)=1+xe^x>0,x\in(0,1)$，

因此 $g(x)>g(0)=0$，即 $\ln\frac{1+x}{1-x}>x,x\in(0,1)$.

所以有 $h(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}>x^2+1-\frac{x^2}{2}-1-\frac{x^2}{2}=0$，

即证得 $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\frac{x^2}{2}$.

16.【解析】由$\begin{cases}0=f_x=(1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},\\0=f_y=-xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}},\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=1,\\y=0,\end{cases}\begin{cases}x=-1,\\y=0.\end{cases}$

且由

$$\begin{cases}A_1=f_{xx}\,|_{(1,0)}=x(x^2-3)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\Big|_{(1,0)}=-2e^{-\frac{1}{2}},\\B_1=f_{xy}\,|_{(1,0)}=y(x^2-1)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\Big|_{(1,0)}=0,\\C_1=f_{yy}\,|_{(1,0)}=x(y^2-1)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\Big|_{(1,0)}=-e^{-\frac{1}{2}},\end{cases}$$

$$\begin{cases}A_2=f_{xx}\,|_{(-1,0)}=x(x^2-3)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\Big|_{(-1,0)}=2e^{-\frac{1}{2}},\\B_2=f_{xy}\,|_{(-1,0)}=y(x^2-1)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\Big|_{(-1,0)}=0,\\C_2=f_{yy}\,|_{(-1,0)}=x(y^2-1)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\Big|_{(-1,0)}=e^{-\frac{1}{2}},\end{cases}$$

可知 $A_1C_1-B_1^2>0,A_1<0$，故 $f(x,y)$ 的极大值为 $f(1,0)=e^{-\frac{1}{2}}$；

$A_2C_2-B_2^2>0,A_2>0$，故 $f(x,y)$ 的极小值为 $f(-1,0)=-e^{-\frac{1}{2}}$.

17.【解析】$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(2n+1)(4n^2+12n+11)}{(2n+3)(4n^2+4n+3)}=1$，故收敛半径 $R=1$.

由于当 $x=\pm1$ 时，级数发散，故该级数的收敛域为$(-1,1)$.

和函数 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2}{2n+1}x^{2n}$，则当 $x\neq0$ 时，有

$$S(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}\right)'+\frac{2}{x}\left[\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n}\mathrm{d}t\right]=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'+\frac{2}{x}\int_0^x\frac{1}{1-t^2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}+\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x},$$

故
$$S(x)=\begin{cases}3, & x=0,\\ \dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2}+\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}, & x\in(-1,0)\cup(0,1).\end{cases}$$

18.【解析】曲线 L 上任意一点(x,y)的切线斜率为 $k=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=-\dfrac{\sin t}{f'(t)}$，则切线方程为

$$y-\cos t=-\frac{\sin t}{f'(t)}[x-f(t)],$$

故切线与 x 轴的交点到切点的距离 $d=\cos^2 t+\cot^2 t[f'(t)]^2=1$.

由于 $f'(t)>0$，故 $f'(t)=\dfrac{\sin^2 t}{\cos t}$，

积分得 $f(t)=\ln\left(\dfrac{1}{\cos t}+\tan t\right)-\sin t+C$，由 $f(0)=0$ 知 $C=0$.

故所求无界区域的面积为

$$I=\int_0^{+\infty}y\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f'(t)\cos t\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}.$$

19.【解析】令 L_0 为由(0,2)到(0,0)的直线，由 L 和 L_0 围成的区域记为 D. 则由格林公式可得

$$I=\iint\limits_D(-3x^2+3x^2+1)\mathrm{d}\sigma-\int_{L_0}3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\mathrm{d}y$$

$$=S_D-\int_2^0(-2y)\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}-4.$$

20.【解析】(1) $|\boldsymbol{A}|=(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{vmatrix}+(-1)^{1+4}\times a\times\begin{vmatrix}a&0&0\\1&a&0\\0&1&a\end{vmatrix}=1-a^4$.

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\begin{cases}r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}),\\|\boldsymbol{A}|=0,\end{cases}$ 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解. 由 $|\boldsymbol{A}|=0$ 可知 $a=\pm1$.

当 $a=1$ 时，

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\1&0&0&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\0&0&1&1&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1\end{array}\right),$$

此时 $r(\boldsymbol{A})=3\neq4=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})$，方程无解.

当 $a=-1$ 时，

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{cccc:c}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\-1&0&0&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&0&-1&0\\0&1&0&-1&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right),$$

此时 $r(\boldsymbol{A})=3=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})$，方程有无穷多解，且通解为

$$\boldsymbol{x}=k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\ (k\text{ 为任意常数}).$$

21.【解析】(1)$A^TA=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&a\\1&1&a&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&1-a\\0&1+a^2&1-a\\1-a&1-a&3+a^2\end{pmatrix}$.

由 $r(A^TA)=2<3$ 知，$|A^TA|=0$，而

$|A^TA|=2(1+a^2)(3+a^2)-(1+a^2)(a-1)^2-2(a-1)^2=(a+1)^2(3+a^2)$，

因此 $a=-1$.

(2) 由(1)知，$A^TA=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{pmatrix}$. 令 $|\lambda E-A^TA|=0$，得特征值为 $\lambda=0,6,2$.

当 $\lambda=0$ 时，由 $(0E-A^TA)X=0$ 解得对应的特征向量为 $X_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$；

当 $\lambda=6$ 时，由 $(6E-A^TA)X=0$ 解得对应的特征向量为 $X_2=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$；

当 $\lambda=2$ 时，由 $(2E-A^TA)X=0$ 解得对应的特征向量为 $X_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$；

将 X_1,X_2,X_3 单位化，令

$$Q=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}&0\end{bmatrix},$$

则通过正交变换 $X=QY$ 可得到标准形

$$f=6y_1^2+2y_2^2.$$

22.【解析】(1)$P\{X=2Y\}=P\{Y=0,X=0\}+P\{Y=1,X=2\}=\frac{1}{4}$.

(2) 由题意可知，

$$E(X)=\frac{1}{2}\times0+\frac{1}{3}\times1+\frac{1}{6}\times2=\frac{2}{3},E(Y)=\frac{1}{3}\times0+\frac{1}{3}\times1+\frac{1}{3}\times2=1;$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{7}{12}\times0+\frac{1}{3}\times1+0\times2+4\times\frac{1}{12}-\frac{2}{3}=0;$$

$$D(Y)=\frac{1}{3}\times(0-1)^2+\frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{3}\times(2-1)^2=\frac{2}{3}.$$

故由 X,Y 的独立性可知，$\mathrm{Cov}(X-Y,Y)=\mathrm{Cov}(X,Y)-\mathrm{Cov}(Y,Y)=0-\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}$.

23.【解析】(1) 因为 X,Y 分别服从于正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，$N(\mu,2\sigma^2)$，且 $Z=X-Y$，所以 Z 服从正态分布 $N(0,3\sigma^2)$，故

$$f(z;\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{6\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{6\sigma^2}},-\infty<2<+\infty.$$

(2) 似然函数为

$$L(\sigma^2)=\prod_{k=1}^{n}f(z_k;\sigma^2)=(6\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{6\sigma^2}\sum\limits_{k=1}^{n}z_k^2},$$

取对数 $$\ln L(\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln(6\pi\sigma^2)-\frac{1}{6\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}z_k^2,$$

令 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\sigma^2)}{\mathrm{d}\sigma^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{6\sigma^4}\sum\limits_{k=1}^{n}z_k^2=0$，解得 $\sigma^2=\frac{1}{3n}\sum\limits_{k=1}^{n}z_k^2$，

故 σ^2 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{3n}\sum\limits_{k=1}^{n}Z_k^2$.

(3) $E(\hat{\sigma}^2)=E\left(\frac{1}{3n}\sum\limits_{k=1}^{n}Z_k^2\right)=\frac{1}{3n}\sum\limits_{k=1}^{n}E(Z_k^2)=\frac{1}{3n}\sum\limits_{k=1}^{n}[E^2(Z_k)+D(Z_k)]=\sigma^2$，

故 $\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量.