

(6) 若函数 $f(x) = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^{\alpha+1}} dx$ 在 $x = \alpha_0$ 处取得最小值, 则 $\alpha_0 = (\quad)$

(A) $-\frac{1}{\ln(\ln 2)}$ (B) $-\ln(\ln 2)$

(C) $-\frac{1}{\ln 2}$ (D) $\ln 2$

(7) 设函数 $f(x) = (x^2 + a)e^x$, 若 $f(x)$ 没有极值点, 但曲线 $y = f(x)$ 有拐点, 则 a 的取值范围是()

(A) $[0, 1)$ (B) $[1, +\infty)$

(C) $[1, 2)$ (D) $[2, +\infty)$

(8) 设 A, B 为 n 阶可逆矩阵, E 为 n 阶单位矩阵, M^* 为矩阵 M 的伴随矩阵, 则 $\begin{pmatrix} A & E \\ O & B \end{pmatrix}^* = (\quad)$

(A) $\begin{pmatrix} |A|B^* & -B^*A^* \\ 0 & A^*B^* \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} |A|B^* & -A^*B^* \\ 0 & |B|A^* \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} |B|A^* & -B^*A^* \\ 0 & |A|B^* \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} |B|A^* & -A^*B^* \\ 0 & |A|B^* \end{pmatrix}$

(9) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 - 4(x_2 - x_3)^2$ 的规范形为()

(A) $y_1^2 + y_2^2$ (B) $y_1^2 - y_2^2$

(C) $y_1^2 + y_2^2 - 4y_3^2$ (D) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

(10) 已知向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\beta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 若 γ 既可由 α_1, α_2 线性表示, 也可由

β_1, β_2 线性表示, 则 $\gamma = (\quad)$

(A) $k \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, k \in R$ (B) $k \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}, k \in R$

(C) $k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, k \in R$ (D) $k \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, k \in R$

二、填空题:11~16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

(11) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(x) = ax + bx^2 + \ln(1+x)$ 与 $g(x) = e^{x^2} - \cos x$ 是等价无穷小, 则 $ab =$ _____.

(12) 曲线 $y = \int_{-\sqrt{3}}^x \sqrt{3-t^2} dt$ 的弧长为 _____.

(13) 设函数 $z = z(x, y)$ 由 $e^z + xz = 2x - y$ 确定, 则 $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial^2 x} \right|_{(1,1)} =$ _____.

(14) 曲线 $3x^3 = y^5 + 2y^3$ 在 $x=1$ 对应点处的法线斜率为 _____.

(15) 设连续函数 $f(x)$ 满足: $f(x+2) - f(x) = x$, $\int_0^2 f(x) dx = 0$, 则 $\int_1^3 f(x) dx =$ _____.

(16) 已知线性方程组 $\begin{cases} ax_1 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ ax_1 + bx_2 = 2 \end{cases}$ 有解, 其 a, b 为常数, 若 $\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = 4$ 则,

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix} = \text{_____}.$$

三、解答题:17~22 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17) (本题满分 10 分)

设曲线 $L: y = y(x) (x > e)$ 经过点 $(e^2, 0)$, L 上任一点 $P(x, y)$ 到 y 轴的距离等于该点处的切线在 y 轴上的截距,

(I) 求 $y(x)$.

(II) 在 L 上求一点, 使该点的切线与两坐标轴所围三角形面积最小, 并求此最小面积.

(18) (本题满分 12 分)

求函数 $f(x, y) = xe^{\cos y} + \frac{x^2}{2}$ 的极值.

(19) (本题满分 12 分)

已知平面区域 $D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}, x \geq 1 \right\}$,

(I) 求 D 的面积.

(II) 求 D 绕 x 轴旋转所成旋转体的体积.

(20)(本题满分 12 分)

设平面有界区域 D 位于第一象限, 由曲线 $x^2 + y^2 - xy = 1$, $x^2 + y^2 - xy = 2$ 与直线 $y = \sqrt{3}x$, $y = 0$

围成, 计算 $\iint_D \frac{1}{3x^2 + y^2} dx dy$.

(21)(本题满分 12 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上具有 2 阶连续导数, 证明:

(I) 若 $f(0) = 0$, 则存在 $\xi \in (-a, a)$, 使得 $f''(\xi) = \frac{1}{a^2}[f(a) + f(-a)]$.

(II) 若 $f(x)$ 在 $(-a, a)$ 内取得极值, 则存在 $\eta \in (-a, a)$ 使得 $|f''(\eta)| \geq \frac{1}{2a^2}|f(a) - f(-a)|$.

(22)(本题满分 12 分)

设矩阵 A 满足: 对任意 x_1, x_2, x_3 均有 $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}$

(I) 求 A ;

(II) 求可逆矩阵 P 与对角矩阵 Λ , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$.

2023 年答案及解析 (数学二)

一、选择题: 1~10 小题, 每小题 5 分, 共 50 分, 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合题目要求的, 请将所选选项前的字母填在答题卡指定位置.

(1)

【答案】 (B)

【解析】 $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln(e + \frac{1}{x-1})}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(e + \frac{1}{x-1}) = 1$

$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} [x \ln(e + \frac{1}{x-1}) - x] = \lim_{x \rightarrow \infty} x [\ln(e + \frac{1}{x-1}) - 1]$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln[1 + \frac{1}{e(x-1)}] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e(x-1)} = \frac{1}{e}$.

所以斜渐近线方程为 $y = x + \frac{1}{e}$.

(2) **【答案】** (D)

【解析】 当 $x \leq 0$ 时,

$$\int f(x)dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C_1$$

当 $x > 0$ 时,

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \int (x+1)\cos x dx = \int (x+1)d\sin x = (x+1)\sin x - \int \sin x dx \\ &= (x+1)\sin x + \cos x + C_2 \end{aligned}$$

原函数在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 则在 $x=0$ 处

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C_1 = C_1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1)\sin x + \cos x + C_2 = 1 + C_2$$

所以 $C_1 = 1 + C_2$, 令 $C_2 = C$, 则 $C_1 = 1 + C$, 故

$$\int f(x)dx = \begin{cases} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 1 + C, & x \leq 0 \\ (x+1)\sin x + \cos x + C, & x > 0 \end{cases}, \text{ 结合选项, 令 } C=0, \text{ 则 } f(x) \text{ 的一个原函数为}$$

$$F(x) = \begin{cases} \ln(\sqrt{1+x^2} + x) + 1, & x \leq 0 \\ (x+1)\sin x + \cos x, & x > 0 \end{cases}$$

(3) 【答案】(B)

【解析】在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 中, $\frac{2}{\pi}x < \sin x$

$$\text{故 } x_{n+1} = \sin x_n > \frac{2}{\pi}x_n$$

$$y_{n+1} < \frac{1}{2}y_n$$

$$\Rightarrow \frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} < \frac{\frac{1}{2}y_n}{\frac{2}{\pi}x_n} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{y_n}{x_n} = L = \left(\frac{\pi}{4}\right)^n \frac{y_1}{x_1} = \left(\frac{\pi}{4}\right)^n$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = 0. \text{ 故 } y_n \text{ 是 } x_n \text{ 的高阶无穷小.}$$

(4) 【答案】(C)

【解析】微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的特征方程为 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$,

当 $\Delta = a^2 - 4b > 0$ 时, 特征方程有两个不同的实根 λ_1, λ_2 , 则 λ_1, λ_2 至少有一个不等于零,

若 C_1, C_2 都不为零, 则微分方程的解 $y = C_1 e^{-\lambda_1 x} + C_2 e^{-\lambda_2 x}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 无界;

当 $\Delta = a^2 - 4b = 0$ 时, 特征方程有两个相同的实根, $\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2}$,

若 $C_2 \neq 0$, 则微分方程的解 $y = C_1 e^{\frac{a}{2}x} + C_2 x e^{\frac{a}{2}x}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 无界;

当 $\Delta = a^2 - 4b < 0$ 时, 特征方程的根为 $\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}i$,

则通解为 $y = e^{-\frac{a}{2}x} (C_1 \cos \frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}x)$,

此时, 要使微分方程的解在 $(-\infty, +\infty)$ 有界, 则 $a = 0$, 再由 $\Delta = a^2 - 4b < 0$, 知 $b > 0$.

(5) 【答案】(C)

【解析】1) 当 $t > 0$ 时, $\begin{cases} x = 3t \\ y = t \sin t \end{cases}, \frac{dy}{dx} = \frac{\sin t + t \cos t}{3}$;

当 $t < 0$ 时, $\begin{cases} x = t \\ y = -t \sin t \end{cases}, \frac{dy}{dx} = \frac{-\sin t - t \cos t}{1}$;

当 $t = 0$ 时, 因为 $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t \sin t}{3t} = 0$;

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{-t \sin t}{t} = 0$$

所以 $f'(0) = 0$.

2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t + t \cos t}{3} = 0 = f'(0)$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{-\sin t - t \cos t}{3} = 0 = f'(0)$;

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0) = 0$, 即 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 连续.

3) 当 $t = 0$ 时, 因为 $f''_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t + t \cos t}{3 \cdot 3t} = \frac{2}{9}$;

$$f''_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{-\sin t - t \cos t}{t} = -2$$

所以 $f''(0)$ 不存在.

(6) 【答案】(A)

【解析】当 $\alpha > 0$ 时 $f(\alpha) = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^{\alpha+1}} dx = -\frac{1}{(\ln x)^\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha} \Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{(\ln 2)^\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha}$

所以 $f'(\alpha) = -\frac{1}{(\ln 2)^\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha^2} - \frac{\ln \ln 2}{(\ln 2)^\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha} \frac{1}{(\ln 2)^\alpha} \cdot \left(\frac{1}{\alpha} + \ln \ln 2 \right) = 0$, 即 $\alpha_0 = -\frac{1}{\ln \ln 2}$.

(7) 【答案】(C)

【解析】 $f(x) = (x^2 + a)e^x$, $f'(x) = (x^2 + a + 2x)e^x$, $f''(x) = (x^2 + 4x + a + 2)e^x$, 由于 $f(x)$ 无极值点, 所以 $4 - 4a \leq 0$, 即 $a \geq 1$; 由于 $f(x)$ 有拐点, 所以 $16 - 4(a + 2) > 0$, 即 $a < 2$; 综上所述 $a \in [1, 2)$.

(8) 【答案】(D)

【解析】结合伴随矩阵的核心公式, 代入(D)计算知

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & E \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |B|A^* & -A^*B^* \\ O & |A|B^* \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} |B|AA^* & -AA^*B^* + |A|B^* \\ O & |A|BB^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |B||A|E & -|A|B^* + |A|B^* \\ O & |A||B|E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |B||A|E & O \\ O & |A||B|E \end{pmatrix} = |A||B|E_{2n}, \text{ 故(D)正确.} \end{aligned}$$

(9) 【答案】(B)

【解析】由已知 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 8x_2x_3$,

$$\text{则其对应的矩阵 } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{由 } |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda + 3 & -4 \\ -1 & -4 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 7)(\lambda - 3) = 0, \text{ 得 } A \text{ 的特征值为 } 3, -7, 0$$

故选(B).

(10) 【答案】(D)

【解析】设 $r = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = y_1\beta_1 + y_2\beta_2$

$$\text{则 } x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 - y_1\beta_1 - y_2\beta_2 = 0$$

$$\text{又 } (\alpha_1, \alpha_2, -\beta_1, -\beta_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -5 & 0 \\ 3 & 1 & -9 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{故 } (x_1, x_2, y_1, y_2)^T = c(-3, 1, -1, 1)^T, c \in R$$

$$\text{所以 } r = -c\beta_1 + c\beta_2 = c(-1, -5, -8)^T = -c(1, 5, 8)^T = k(1, 5, 8)^T, k \in R.$$

二、填空题:11~16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

(11) 【答案】-2

【解析】由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax + bx^2 + \ln(1+x)}{e^{x^2} - \cos x} = \frac{ax + bx^2 + x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{1 + x^2 + o(x^2) - \left[1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right]} = 1$ 可得

$$a+1=0, \quad b-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}, \quad \text{即 } a=-1, b=2, ab=-2.$$

(12) 【答案】 $\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi$

【解析】 $y' = \sqrt{3-x^2}$, 由弧长公式可得 $l = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{1+y'} dx = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2} dx \stackrel{x=2\sin t}{=} 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} 4 \cos^2 t dt$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{3}} 1 + \cos 2t dt = \sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi.$$

(13) 【答案】 $-\frac{3}{2}$

【解析】两边同时对 x 求导得: $e^z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + z + x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 2 - 0$ ①

两边再同时对 x 求导得: $e^z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + e^z \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} + x \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$ ②

将 $x=1, y=1$ 代入原方程得 $e^z + z = 1 \Rightarrow z = 0$,

代入①式得 $e^0 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + 0 + \frac{\partial z}{\partial x} = 2 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = 1$.

代入②式得 $e^0 \cdot 1 + e^0 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 1 + 1 + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{3}{2}$.

(14) 【答案】 $-\frac{11}{9}$

【解析】两边对 x 求导: $9x^2 = 5y^4 \cdot y' + 6y^2 \cdot y'$ ①

当 $x=1$ 时, 代入原方程得 $3 = y^5 + 2y^3 \Rightarrow y = 1$

将 $x=1, y=1$ 代入①式得 $9 = 5y' + 6y' \Rightarrow y'|_{(1,1)} = \frac{9}{11}$,

所以曲线在 $x=1$ 处的法线斜率为 $-\frac{11}{9}$.

(15) 【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】 $\int_1^3 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx$

$$= \int_1^2 f(x) dx + \int_0^1 f(x+2) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_1^2 f(x)dx + \int_0^1 [f(x) + x]dx \\
&= \int_1^2 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 xdx \\
&= \int_0^2 f(x)dx + \int_0^1 xdx \\
&= 0 + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(16) 【答案】 8

【解析】由已知 $r(A) = r(A, b) \leq 3 < 4$, 故 $|A, b| = 0$

$$\text{即 } |A, b| = \begin{vmatrix} a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ a & b & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot 4 = 0$$

$$\text{故 } \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix} = 8.$$

三、解答题:17~22 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17) 【解析】(I) 曲线 L 在点 $P(x, y)$ 处的切线方程为 $Y - y = y'(X - x)$, 令 $X = 0$, 则切线在 y 轴上的截距为 $Y = y - xy'$, 则 $x = y - xy'$, 即 $y' - \frac{1}{x}y = -1$, 解得 $y(x) = x(C - \ln x)$, 其中 C 为任意常数.

又 $y(e^2) = 0$, 则 $C = 2$, 故 $y(x) = x(2 - \ln x)$.

(II) 设曲线 L 在点 $(x, x(2 - \ln x))$ 处的切线与两坐标轴所围三角形面积最小, 此时切线方程为

$$Y - x(2 - \ln x) = (1 - \ln x)(X - x).$$

令 $Y = 0$, 则 $X = \frac{x}{\ln x - 1}$; 令 $X = 0$, 则 $Y = x$.

故切线与两坐标轴所围三角形面积为 $S(x) = \frac{1}{2}XY = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\ln x - 1} \cdot x = \frac{x^2}{2(\ln x - 1)}$,

则 $S'(x) = \frac{x(2 \ln x - 3)}{2(\ln x - 1)^2}$. 令 $S'(x) = 0$, 得驻点 $x = e^{\frac{3}{2}}$.

当 $e < x < e^{\frac{3}{2}}$ 时, $S'(x) < 0$; 当 $x > e^{\frac{3}{2}}$ 时, $S'(x) > 0$, 故 $S(x)$ 在 $x = e^{\frac{3}{2}}$ 处取得极小值, 同时也取最小值, 且最小值为 $S(e^{\frac{3}{2}}) = e^3$.

(18)

【解析】 $\begin{cases} f'_x = e^{\cos y} + x = 0 \\ f'_y = xe^{\cos y}(-\sin y) = 0 \end{cases}$, 得驻点为: $(-e^{-1}, k\pi)$, 其中 k 为奇数; $(-e, k\pi)$, 其中 k 为

偶数.

$$\text{则 } \begin{cases} f''_{xx} = 1 \\ f''_{xy} = e^{\cos y}(-\sin y) \\ f''_{yy} = xe^{\cos y} \sin^2 y + xe^{\cos y}(-\cos y) \end{cases}$$

代入 $(-e^{-1}, k\pi)$, 其中 k 为奇数, 得 $\begin{cases} A = f''_{xx} = 1 \\ B = f''_{xy} = 0 \\ C = f''_{yy} = -e^{-2} \end{cases}$, $AC - B^2 < 0$, 故 $(-e^{-1}, k\pi)$ 不是极值点;

代入 $(-e, k\pi)$, 其中 k 为偶数, 得 $\begin{cases} A = f''_{xx} = 1 \\ B = f''_{xy} = 0 \\ C = f''_{yy} = e^2 \end{cases}$, $AC - B^2 > 0$ 且 $A > 0$, 故 $(-e, k\pi)$ 是极小值点,

$f(-e, k\pi) = -\frac{e^2}{2}$ 为极小值.

(19) 【解析】 (I) 由题设条件可知:

$$S = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} dx = \int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2\sqrt{1+x^2}} dx \stackrel{\sqrt{1+x^2}=t}{=} \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{t}{(t^2-1)t} dt = \frac{1}{2} \ln \frac{t-1}{t+1} \Big|_{\sqrt{2}}^{+\infty} = \ln(\sqrt{2}+1);$$

$$\text{(II) 旋转体体积 } V = \int_1^{+\infty} \pi y^2 dx = \pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+x)^2} dx = \pi \int_1^{+\infty} \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(1+x)^2} \right] dx = \pi \left(1 - \frac{\pi}{4} \right).$$

(20) 【解析】 本题目采用极坐标进行计算

$$\begin{aligned}
& \iint_D \frac{1}{3x^2 + y^2} d\sigma \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{1-\sin\theta\cos\theta}}}^{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\sin\theta\cos\theta}}} \frac{1}{r^2(3\cos^2\theta + \sin^2\theta)} r dr = \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{1-\sin\theta\cos\theta}}}^{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\sin\theta\cos\theta}}} \frac{1}{(3\cos^2\theta + \sin^2\theta)r} \frac{1}{r} d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{(3\cos^2\theta + \sin^2\theta)} \cdot \ln r \Big|_{\frac{1}{\sqrt{1-\sin\theta\cos\theta}}}^{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\sin\theta\cos\theta}}} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{(3\cos^2\theta + \sin^2\theta)} \cdot \ln \sqrt{2} d\theta \\
&= \frac{1}{2} \ln 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{(3 + \tan^2\theta) \cdot \cos^2\theta} d\theta = \ln 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{(3 + \tan^2\theta)} d \tan \theta \\
&= \frac{1}{2} \ln 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\tan \theta}{\sqrt{3}} \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{8\sqrt{3}} \ln 2
\end{aligned}$$

(21)

【解析】 (I) 证明: $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\eta)}{2!}x^2 = f'(0)x + \frac{f''(\eta)}{2!}x^2$, η 介于 0 与 x 之间,

$$\text{则 } f(a) = f'(0)a + \frac{f''(\eta_1)}{2!}a^2, 0 < \eta_1 < a \quad \textcircled{1}$$

$$f(-a) = f'(0)(-a) + \frac{f''(\eta_2)}{2!}a^2, -a < \eta_2 < 0 \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{ 得: } f(a) + f(-a) = \frac{a^2}{2} [f''(\eta_1) + f''(\eta_2)] \quad \textcircled{3}$$

又 $f''(x)$ 在 $[\eta_2, \eta_1]$ 上连续, 则必有最大值 M 与最小值 m , 即

$$m \leq f''(\eta_1) \leq M; m \leq f''(\eta_2) \leq M; \text{ 从而 } m \leq \frac{f''(\eta_1) + f''(\eta_2)}{2} \leq M;$$

由介值定理得: 存在 $\xi \in [\eta_2, \eta_1] \subset (-a, a)$, 有 $\frac{f''(\eta_1) + f''(\eta_2)}{2} = f''(\xi)$, 代入 $\textcircled{3}$ 得:

$$f(a) + f(-a) = a^2 f''(\xi), \text{ 即 } f''(\xi) = \frac{f(a) + f(-a)}{a^2}$$

(II) 证明: 设 $f(x)$ 在 $x = x_0 \in (-a, a)$ 取极值, 且 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 可导, 则 $f'(x_0) = 0$.

又 $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\gamma)}{2!}(x - x_0)^2 = f(x_0) + \frac{f''(\gamma)}{2!}(x - x_0)^2$, γ 介于 0 与 x 之间,

$$\text{则 } f(-a) = f(x_0) + \frac{f''(\gamma_1)}{2!}(-a - x_0)^2, -a < \gamma_1 < 0$$

$$f(a) = f(x_0) + \frac{f''(\gamma_2)}{2!}(a-x_0)^2, 0 < \gamma_2 < a$$

$$\begin{aligned} \text{从而 } |f(a) - f(-a)| &= \left| \frac{1}{2}(a-x_0)^2 f''(\gamma_2) - \frac{1}{2}(a+x_0)^2 f''(\gamma_1) \right| \\ &\leq \frac{1}{2} |(a-x_0)^2 f''(\gamma_2)| + \frac{1}{2} |(a+x_0)^2 f''(\gamma_1)| \end{aligned}$$

又 $|f''(x)|$ 连续, 设 $M = \max\{|f''(\gamma_1)|, |f''(\gamma_2)|\}$, 则

$$|f(a) - f(-a)| \leq \frac{1}{2} M (a+x_0)^2 + \frac{1}{2} M (a-x_0)^2 = M (a^2 + x_0^2)$$

又 $x_0 \in (-a, a)$, 则 $|f(a) - f(-a)| \leq M (a^2 + x_0^2) \leq 2Ma^2$, 则

$$M \geq \frac{1}{2a^2} |f(a) - f(-a)|, \text{ 即存在 } \eta = \gamma_1 \text{ 或 } \eta = \gamma_2 \in (-a, a), \text{ 有}$$

$$|f''(\eta)| \geq \frac{1}{2a^2} |f(a) - f(-a)|$$

(22)

【解析】(I) 因为 $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 对任意的 x_1, x_2, x_3 均成立,

$$\text{所以 } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{(II) } |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 \\ -2 & \lambda + 1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \cdot \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -1 \\ -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda^2 + 2\lambda) - 2(\lambda + 2) = (\lambda + 2)(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0.$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$.

$$\lambda_1 = -2 \text{ 时, } \lambda_1 E - A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 可得特征向量 } \alpha_1 = (0, -1, 1)^T;$$

$$\lambda_2 = 2 \text{ 时, } \lambda_2 E - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 可得特征向量 } \alpha_2 = (4, 3, 1)^T;$$

$$\lambda_3 = -1 \text{ 时, } \lambda_3 E - A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 可得特征向量 } \alpha_3 = (1, 0, -2)^T;$$

$$\text{令 } P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \text{ 则 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

