2022年全国硕士研究生招生考试数学(二)试题

一、选择题(本题共10小题,每小题5分,共50分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 若当 $x \to 0$ 时,$\alpha(x),\beta(x)$ 是非零无穷小量,则以下的命题中,

① 若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$,则 $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$;

② 若 $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$,则 $\alpha(x) \sim \beta(x)$;

③ 若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$,则 $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$;

④ 若 $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$,则 $\alpha(x) \sim \beta(x)$,

真命题的序号为(　　)

(A)①③.　　(B)①④.　　(C)①③④.　　(D)②③④.

(2) $\int_0^2 \mathrm{d}y \int_y^2 \frac{y}{\sqrt{1+x^3}}\mathrm{d}x =$ (　　)

(A) $\frac{\sqrt{2}}{6}$.　　(B) $\frac{1}{3}$.　　(C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$.　　(D) $\frac{2}{3}$.

(3) 设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处有二阶导数,则(　　)

(A) 当 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内单调增加时,$f'(x_0) > 0$.

(B) 当 $f'(x_0) > 0$ 时,$f(x)$ 在 x_0 的某邻域内单调增加.

(C) 当 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内是凹函数时,$f''(x_0) > 0$.

(D) 当 $f''(x_0) > 0$ 时,$f(x)$ 在 x_0 的某邻域内是凹函数.

(4) 已知 $f(t)$ 连续,令 $F(x,y) = \int_0^{x-y}(x-y-t)f(t)\mathrm{d}t$,则(　　)

(A) $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

(B) $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

(C) $\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

(D) $\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

(5) 设 p 为常数,若反常积分 $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}\mathrm{d}x$ 收敛,则 p 的取值范围是(　　)

(A) $(-1,1)$.　　(B) $(-1,2)$.　　(C) $(-\infty,1)$.　　(D) $(-\infty,2)$.

(6) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $-\frac{\pi}{2} \leqslant x_n \leqslant \frac{\pi}{2}$,则(　　)

(A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$ 存在,则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

(B) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$ 存在,则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

(C) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$ 存在,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n$ 存在,但 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不一定存在.

(D) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$ 存在,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n$ 存在,但 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不一定存在.

(7) 若 $I_1=\int_0^1 \frac{x}{2(1+\cos x)}dx, I_2=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+\cos x}dx, I_3=\int_0^1 \frac{2x}{1+\sin x}dx$,则(　　)

(A) $I_1<I_2<I_3$.　　(B) $I_2<I_1<I_3$.　　(C) $I_1<I_3<I_2$.　　(D) $I_3<I_2<I_1$.

(8) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1,-1,0 的充分必要条件是(　　)

(A) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda Q}$.

(B) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$.

(C) 存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q\Lambda Q}^{-1}$.

(D) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{\mathrm{T}}$.

(9) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a&a^2\\1&b&b^2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$,则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解的情况为(　　)

(A) 无解.　　(B) 有解.

(C) 有无穷多解或无解.　　(D) 有唯一解或无解.

(10) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(\lambda,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,\lambda,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,\lambda)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(1,\lambda,\lambda^2)^{\mathrm{T}}$,若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 等价,则 λ 的取值范围是(　　)

(A) $\{0,1\}$.　　(B) $\{\lambda\mid\lambda\in\mathbf{R},\lambda\neq-2\}$.

(C) $\{\lambda\mid\lambda\in\mathbf{R},\lambda\neq-1,\lambda\neq-2\}$.　　(D) $\{\lambda\mid\lambda\in\mathbf{R},\lambda\neq-1\}$.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 5 分,共 30 分,把答案填在题中横线上.)

(11) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\cot x}=$ ______.

(12) 已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^2+xy+y^3=3$ 确定,则 $y''(1)=$ ______.

(13) $\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2-x+1}dx=$ ______.

(14) 微分方程 $y'''-2y''+5y'=0$ 的通解为 $y(x)=$ ______.

(15) 已知曲线 L 的极坐标方程为 $r=\sin 3\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}\right)$,则 L 围成的有界区域的面积为______.

(16) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行和第 3 行,再将第 2 列的 -1 倍加到第 1 列,得到矩阵 $\begin{pmatrix}-2&1&-1\\1&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的迹 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{-1})=$ ______.

三、解答题(本题共 6 小题,共 70 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(17)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(e^{x^2})-3f(1+\sin^2 x)}{x^2}=2$,求 $f'(1)$.

(18)(本题满分 12 分)

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $2xy'-4y=2\ln x-1$ 的满足条件 $y(1)=\frac{1}{4}$ 的解,求曲线 $y=y(x)$ $(1\leqslant x\leqslant \mathrm{e})$ 的弧长.

(19)(本题满分 12 分)

已知平面区域 $D=\{(x,y)\mid y-2\leqslant x\leqslant \sqrt{4-y^2},0\leqslant y\leqslant 2\}$,计算 $I=\iint\limits_D \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(20)(本题满分 12 分)

已知可微函数 $f(u,v)$ 满足 $\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}-\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}=2(u-v)\mathrm{e}^{-(u+v)}$, 且 $f(u,0)=u^2\mathrm{e}^{-u}$.

(Ⅰ)记 $g(x,y)=f(x,y-x)$,求 $\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}$;

(Ⅱ)求 $f(u,v)$ 的表达式与极值.

(21)(本题满分 12 分)

设函数$f(x)$ 在$(-\infty, +\infty)$上有二阶连续导数,证明:$f''(x) \geqslant 0$ 的充分必要条件是对任意不同的实数 a,b,都有$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leqslant \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 成立.

(22)(本题满分 12 分)

已知二次型$f(x_1,x_2,x_3) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3$.

(Ⅰ)求正交矩阵$\boldsymbol{Q}$,使正交变换$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将二次型$f(x_1,x_2,x_3)$化为标准形;

(Ⅱ)证明 $\min\limits_{x \neq 0} \dfrac{f(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}} = 2$.

2022 年全国硕士研究生招生考试 数学(二)试题解析

一、选择题

1 若当 $x\to 0$ 时,$\alpha(x)$,$\beta(x)$ 是非零无穷小量,则以下的命题中,

① 若 $\alpha(x)\sim\beta(x)$,则 $\alpha^2(x)\sim\beta^2(x)$;

② 若 $\alpha^2(x)\sim\beta^2(x)$,则 $\alpha(x)\sim\beta(x)$;

③ 若 $\alpha(x)\sim\beta(x)$,则 $\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))$;

④ 若 $\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))$,则 $\alpha(x)\sim\beta(x)$,

真命题的序号为(　　)

(A)①③.　　(B)①④.　　(C)①③④.　　(D)②③④.

答案 C.

分析 本题主要考查无穷小量的概念.

四个命题均与无穷小量等价这个概念有关.

当 $x\to 0$ 时,$\alpha(x)\sim\beta(x)$ 意味着 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$,$o(\alpha(x))$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(\alpha(x))}{\alpha(x)}=0$.

解 依次分析四个命题.

若 $\alpha(x)\sim\beta(x)$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$,从而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha^2(x)}{\beta^2(x)}=1$,即 $\alpha^2(x)\sim\beta^2(x)$. 命题①是真命题.

由 $\alpha^2(x)\sim\beta^2(x)$ 并不能得到 $\alpha(x)\sim\beta(x)$. 考虑 $\beta(x)=-\alpha(x)$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha^2(x)}{\beta^2(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha^2(x)}{\alpha^2(x)}=1$,即 $\alpha^2(x)\sim\beta^2(x)$,但 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{-\alpha(x)}=-1$,$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 只是同阶但并不等价的无穷小量. 命题②不是真命题.

要说明 $\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))$,只需说明 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)}=0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)}=1-\lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\xlongequal{\alpha(x)\sim\beta(x)}1-1=0.$$

命题③是真命题.

要说明 $\alpha(x)\sim\beta(x)$,只需说明 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)-[\alpha(x)-\beta(x)]}{\alpha(x)}=1-\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)}=1-0=1.$$

命题④是真命题.

综上所述,应选 C.

注 考查无穷小量的比较以及$o(\cdot)$符号含义的题目,历年真题当中出现较少,在2013年数三真题中有一道考查$o(\cdot)$符号含义的题目.

【例】当$x \to 0$时,用"$o(x)$"表示比x高阶的无穷小量,则下列式子中错误的是(　　)(2013年数学三试题)

(A)$x \cdot o(x^2) = o(x^3)$.　　(B)$o(x) \cdot o(x^2) = o(x^3)$.

(C)$o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$.　　(D)$o(x) + o(x^2) = o(x^2)$.

答案　D.

2 $\int_0^2 \mathrm{d}y \int_y^2 \frac{y}{\sqrt{1+x^3}}\mathrm{d}x = $(　　)

(A)$\frac{\sqrt{2}}{6}$.　　(B)$\frac{1}{3}$.　　(C)$\frac{\sqrt{2}}{3}$.　　(D)$\frac{2}{3}$.

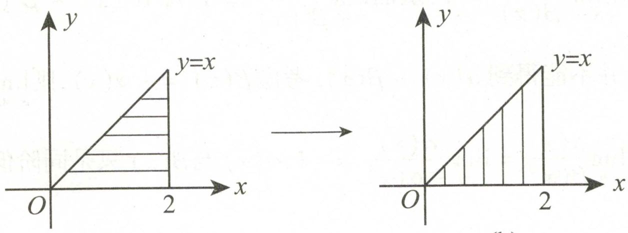
答案 D.

分析 本题主要考查交换积分次序.

本题中的二次积分,按照题目给定的先x,后y的次序不太好算,故应考虑交换积分次序.

解 如图(a)所示,二次积分对应的积分区域D是由直线$y = x, x = 2$以及x轴所围成的三角形区域.原二次积分采用的是先x,后y的积分次序,改写成先y,后x的积分次序,即将D写成X型区域,如图(b)所示.

$$D = \{(x,y) \mid 0 \leqslant y \leqslant x, 0 \leqslant x \leqslant 2\}.$$



(a)　　(b)

因此,

$$\text{原积分} = \iint\limits_D \frac{y}{\sqrt{1+x^3}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\mathrm{d}x \int_0^x y\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^2 \frac{\mathrm{d}(1+x^3)}{\sqrt{1+x^3}} = \frac{1}{6} \cdot 2\sqrt{1+x^3}\Big|_0^2 = \frac{1}{3} \times (3-1) = \frac{2}{3}.$$

应选D.

3 设$f(x)$在$x = x_0$处有二阶导数,则(　　)

(A)当$f(x)$在x_0的某邻域内单调增加时,$f'(x_0) > 0$.

(B)当$f'(x_0) > 0$时,$f(x)$在x_0的某邻域内单调增加.

(C)当$f(x)$在x_0的某邻域内是凹函数时,$f''(x_0) > 0$.

(D) 当 $f''(x_0)>0$ 时，$f(x)$ 在 x_0 的某邻域内是凹函数.

答案 B.

分析 本题主要考查一阶导数、二阶导数与函数性态的关系.

函数的单调性与一阶导数的关系 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导. 若在 (a,b) 内 $f'(x)\geqslant 0$，且等号只在有限个点处成立，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加.（单调减少的情况对应于 $f'(x)\leqslant 0$ 的情况.）

函数的凹凸性与二阶导数的关系 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导. 若在 (a,b) 内 $f''(x)\geqslant 0$，且等号只在有限个点处成立，则 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的凹函数.（凸函数的情况对应于 $f''(x)\leqslant 0$ 的情况.）

在不确定一阶导函数的连续性的情况下，单点处的一阶导符号不能确定该点邻域内的函数的单调性. 在不确定二阶导函数的连续性的情况下，单点处的二阶导符号不能确定该点邻域内的曲线的凹凸性.

解 注意到题目条件给出 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有二阶导数，故 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内存在连续的一阶导数. 特别地，$f'(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续. 从而，$\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=f'(x_0)>0$. 结合极限的定义可得，存在 $\delta>0$，当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)>0$. 于是，$f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内单调增加. 应选 B.

下面说明选项 A、C、D 不正确.

在一阶导数连续的条件下，当 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内单调增加时，我们能得到在该邻域内 $f'(x)\geqslant 0$，但却不能保证 $f'(x)>0$，因为可能存在有限个点，在这些点处，$f'(x)=0$. 例如 $f(x)=x^3$，该函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加，但是 $f'(0)=0$. 选项 A 不正确.

对选项 C，考虑 $f(x)=x^4$，则 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的凹函数，但是 $f''(0)=0$. 选项 C 不正确.

对选项 D，我们可以考虑二阶导函数存在间断点的例子. 若 x_0 为 $f''(x)$ 的间断点，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f''(x)=f''(x_0)>0$ 不成立，从而无法通过极限的定义得到 x_0 的一个小邻域，在该小邻域内 $f''(x)>0$.

考虑函数 $f(x)=\begin{cases}x^4\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{x^2}{4}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 该函数在 $x=0$ 处存在二阶导数，但是 $f''(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=4x^3\sin\dfrac{1}{x}-x^2\cos\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}x$. 当 $x=0$ 时，由导数定义，

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4\sin\frac{1}{x}+\frac{x^2}{4}}{x}=0.$$

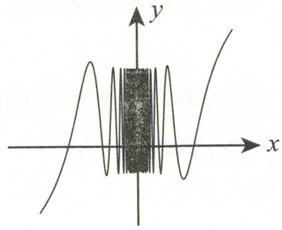
因此，

$$f'(x)=\begin{cases}4x^3\sin\dfrac{1}{x}-x^2\cos\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}x, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

$f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

当 $x=0$ 时，由导数定义，

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^3\sin\frac{1}{x}-x^2\cos\frac{1}{x}+\frac{1}{2}x}{x}=\frac{1}{2}>0.$$



当 $x \neq 0$ 时，$f''(x) = 12x^2\sin\frac{1}{x} - 6x\cos\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x} + \frac{1}{2}$. 如图所示，$f''(x)$ 在 $x = 0$ 附近振荡，振幅为1，在 $x = 0$ 附近不存在小邻域使得 $f''(x)$ 在该邻域上保持不变号，即不存在 $x = 0$ 的小邻域，使得 $f(x)$ 在该邻域上是凹函数或凸函数. 选项 D 不正确.

4 已知 $f(t)$ 连续，令 $F(x,y) = \int_0^{x-y}(x-y-t)f(t)\,dt$，则(　　)

(A) $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.　　(B) $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

(C) $\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.　　(D) $\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

答案 C.

分析 本题主要考查变限积分求偏导数.

$F(x,y)$ 是由含参变量的变限积分给出的二元函数，求它的偏导数，可以先将参变量从被积函数中分离出去，再利用变限积分求导公式计算偏导数.

解 整理 $F(x,y)$ 的表达式.

$$F(x,y) = \int_0^{x-y}(x-y-t)f(t)\,dt = (x-y)\int_0^{x-y}f(t)\,dt - \int_0^{x-y}tf(t)\,dt.$$

分别计算 $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (x-y)f(x-y) + \int_0^{x-y}f(t)\,dt - (x-y)f(x-y) = \int_0^{x-y}f(t)\,dt,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial\left[\int_0^{x-y}f(t)\,dt\right]}{\partial x} = f(x-y),$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -(x-y)f(x-y) - \int_0^{x-y}f(t)\,dt + (x-y)f(x-y) = -\int_0^{x-y}f(t)\,dt,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial\left[-\int_0^{x-y}f(t)\,dt\right]}{\partial y} = f(x-y).$$

因此，$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$. 应选 C.

注 2005 年数一、数二真题中,也有一道与本题类似的题.

【例】设函数 $u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)\mathrm{d}t$,其中函数 φ 具有二阶导数,ψ 具有一阶导数,则必有(　　)(2005 年数学一、二试题)

(A) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　(B) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　(C) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　(D) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

答案　B.

5 设 p 为常数,若反常积分 $\int_0^1\frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}\mathrm{d}x$ 收敛,则 p 的取值范围是(　　)

(A) $(-1,1)$.　(B) $(-1,2)$.　(C) $(-\infty,1)$.　(D) $(-\infty,2)$.

答案 A.

分析 本题主要考查反常积分审敛.

本题中的反常积分为瑕积分,有两个点需要考虑,$x=0,x=1$.

无界函数的极限审敛法　设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续,$f(x)\geqslant 0$,$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=+\infty$,并且存在常数 p,使得 $\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^p f(x)=A$.

(1) 若 $0\leqslant A<+\infty$,$0<p<1$,则反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) 若 $0<A\leqslant+\infty$,$p\geqslant 1$,则反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

解 由于 $x=0$ 和 $x=1$ 均为可能的瑕点,故将积分拆成两部分.

$$\int_0^1\frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}\mathrm{d}x.$$

先考虑 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}\mathrm{d}x$.

当 $p<0$ 时,$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}=0$,$x=0$ 不是瑕点,$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}\mathrm{d}x$ 为常义积分.

当 $0\leqslant p<1$ 时,取 $\delta>0$,使得 $0<p+\delta<1$,从而

$$\lim_{x\to 0^+}x^{p+\delta}\cdot\frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}=\lim_{x\to 0^+}x^{\delta}\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-\delta}}\xlongequal{\text{洛必达}}\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{-\delta x^{-\delta}}=0.$$

由无界函数的极限审敛法可知,$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}\mathrm{d}x$ 收敛.

当 $p=1$ 时,

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\ln x\,\mathrm{d}(\ln x)=\left.\frac{(\ln x)^2}{2}\right|_0^{\frac{1}{2}}=-\infty.$$

于是,当 $p\geqslant 1$ 时,$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}\mathrm{d}x$ 发散.

因此,当 $p<1$ 时,$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}\mathrm{d}x$ 收敛,当 $p\geqslant 1$ 时,$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}\mathrm{d}x$ 发散.

再考虑 $\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}\mathrm{d}x$.

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln(1+x-1)}{x^p(1-x)^{1-p}}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(1-x)}{(1-x)^{1-p}}=-\lim_{x\to 1^-}(1-x)^p.$$

于是,当 $p\geqslant 0$ 时,$x=1$ 不是瑕点,$\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}\mathrm{d}x$ 为常义积分.

当 $0<-p<1$,即 $-1<p<0$ 时,

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)^{-p}\cdot\frac{-\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}=\lim_{x\to 1^-}(1-x)^{-p}\cdot(1-x)^p=1.$$

由无界函数的极限审敛法可知,$\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}\mathrm{d}x$ 收敛.

当 $-p\geqslant 1$,即 $p\leqslant -1$ 时,同理可得 $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)^{-p}\cdot\frac{-\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}=1$,从而由无界函数的极限审敛法可知,$\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}\mathrm{d}x$ 发散.

因此,当 $p>-1$ 时,$\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}\mathrm{d}x$ 收敛,当 $p\leqslant -1$ 时,$\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}\mathrm{d}x$ 发散.

综上所述,$\int_0^1\frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}\mathrm{d}x$ 收敛当且仅当 $p\in(-\infty,1)\cap(-1,+\infty)=(-1,1)$. 应选 A.

拓展

以下为历年真题中关于反常积分审敛的同类真题.

【例】设 m,n 均是正整数,则反常积分 $\int_0^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$ 的收敛性(　　)(2010 年数学一、二试题)

(A) 仅与 m 的取值有关.　　(B) 仅与 n 的取值有关.

(C) 与 m,n 的取值都有关.　　(D) 与 m,n 的取值都无关.

答案　D.

【例】若反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}\mathrm{d}x$ 收敛,则(　　)(2016 年数学一试题)

(A) $a<1$ 且 $b>1$.　　(B) $a>1$ 且 $b>1$.

(C) $a<1$ 且 $a+b>1$.　　(D) $a>1$ 且 $a+b>1$.

答案　C.

6 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x_n\leqslant\frac{\pi}{2}$,则(　　)

(A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$ 存在,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

(B) 若$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$存在,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

(C) 若$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$存在,则$\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n$存在,但$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不一定存在.

(D) 若$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$存在,则$\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n$存在,但$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不一定存在.

答案 D.

分析 本题主要考查数列极限与函数极限的关系.

题目中出现的$\sin(\cos x)$与$\cos(\sin x)$均为复合函数,要将$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$与$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$内层的数列取出来,可以考虑在外层再复合上外层函数的反函数(如果存在的话).

解 若$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$存在,则将其记为$a$. 由于$\sin x$在$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$上存在反函数$\arcsin x$,故

$$\lim_{n\to\infty}\cos x_n=\lim_{n\to\infty}\arcsin(\sin(\cos x_n))=\arcsin(\lim_{n\to\infty}\sin(\cos x_n))=\arcsin a.$$

但是$\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n$存在并不能保证$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在. 例如取$x_n=(-1)^n\dfrac{\pi}{2}$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n=0$,但$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不存在. 选项B错误,选项D正确. 应选D.

由于$\cos x$在$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$上并不单调,故由$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$存在并不能保证$\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n$存在. 同样取$x_n=(-1)^n\dfrac{\pi}{2}$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)=\cos 1$,但$\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n$和$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$均不存在. 选项A、C不正确.

注 ①考虑到$\cos x$是偶函数,形如$x_n=(-1)^n a, a\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$的数列均可作为选项A、B、C的反例.

②这道题的出题思路在2017年的一道数二真题当中也出现过.

【例】设数列$\{x_n\}$收敛,则(　　)(2017年数学二试题)

(A) 当$\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=0$时,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(B) 当$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sqrt{|x_n|})=0$时,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(C) 当$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+x_n^2)=0$时,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(D) 当$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sin x_n)=0$时,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

答案　D.

7 若$I_1=\displaystyle\int_0^1\frac{x}{2(1+\cos x)}dx, I_2=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+\cos x}dx, I_3=\int_0^1\frac{2x}{1+\sin x}dx$,则(　　)

(A) $I_1<I_2<I_3$.　(B) $I_2<I_1<I_3$.　(C) $I_1<I_3<I_2$.　(D) $I_3<I_2<I_1$.

答案 A.

分析 本题主要考查定积分比较大小.

三个定积分的积分区间相同,故只需比较被积函数的大小.

解 通过观察可发现,要比较I_1与I_2的大小,只需比较$\dfrac{x}{2}$与$\ln(1+x)$的大小.

令$f(x)=\ln(1+x)-\dfrac{x}{2}$,则$f(0)=0$,$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{2}$. 当$x\in(0,1)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调增加,从而$f(x)>f(0)=0$,即$\ln(1+x)>\dfrac{x}{2}$,$\dfrac{\ln(1+x)}{1+\cos x}>\dfrac{x}{2(1+\cos x)}$. 因此,$I_2>I_1$.

此外,同样的方法不难证明在$(0,1)$内,$\ln(1+x)<x$.

另一方面,由于在$(0,1)$内,$0<\sin x,\cos x<1$,$1<1+\sin x<2$,故I_3的被积函数$\dfrac{2x}{1+\sin x}>x$. 结合$\ln(1+x)<x$可得,$\dfrac{\ln(1+x)}{1+\cos x}<\dfrac{x}{1+\cos x}<x$. 于是,$\dfrac{2x}{1+\sin x}>x>\dfrac{\ln(1+x)}{1+\cos x}$. 因此,$I_3>I_2$.

综上所述,应选 A.

8 设$\boldsymbol{A}$为3阶矩阵,$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,则$\boldsymbol{A}$的特征值为$1,-1,0$的充分必要条件是(　　)

(A) 存在可逆矩阵$\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$,使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda Q}$.

(B) 存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$,使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$.

(C) 存在正交矩阵$\boldsymbol{Q}$,使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q\Lambda Q}^{-1}$.

(D) 存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$,使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{\mathrm{T}}$.

答案 B.

分析 本题主要考查矩阵相似的条件.

3阶矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$1,-1,0$意味着$\boldsymbol{A}$有3个不同的特征值,从而相似于与它具有相同特征值的对角矩阵,即$\boldsymbol{\Lambda}$.

矩阵相似的定义　设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$都是$n$阶矩阵,若有可逆矩阵$\boldsymbol{P}$,使$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$,则称$\boldsymbol{B}$是$\boldsymbol{A}$的相似矩阵,或者称矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似.

解 3阶矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$1,-1,0$意味着$\boldsymbol{A}$有3个不同的特征值,从而$\boldsymbol{A}$相似于与它具有相同特征值的对角矩阵,即$\boldsymbol{\Lambda}$. 于是,$\boldsymbol{A}$的特征值为$1,-1,0$的充分必要条件即$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{\Lambda}$相似的充分必要条件.

选项 B 实际上为$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{\Lambda}$相似的定义,即存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$,使得$\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$,也即$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$. 因此,应选 B.

下面说明选项 A、C、D 不正确.

选项 A 是$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{\Lambda}$等价的定义. 若两矩阵相似,则它们必等价,但两个等价的矩阵不一定相似,例如$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,故选项 A 是$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{\Lambda}$相似的必要不充分条件.

因为正交矩阵也是可逆矩阵,所以选项 C 是$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{\Lambda}$相似的充分条件. 但选项 C 并不是$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{\Lambda}$相似的必要条件,因为$\boldsymbol{A}$不一定能找到一组相互正交的特征向量,这一要求对实对称矩阵成立,对一般矩阵不成立.

取 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 相互均不正交. 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3),\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&-1\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似，但是 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关的特征向量均不正交.

选项 D 是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 合同的定义. 对一般矩阵而言，相似与合同之间并无相互蕴含的关系.

考虑选项 A 的反例 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，这两个矩阵具有相同的正、负惯性指数，从而合同，但它们并不相似.

考虑选项 C 的反例 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&-1\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. 由前面的分析可知，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似. 又因为 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是实对称矩阵，而与实对称矩阵合同的矩阵一定是实对称矩阵，但 $\boldsymbol{A}$ 不是实对称矩阵，所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 不合同.

因此，选项 D 既不是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似的充分条件，也不是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似的必要条件.

拓展

矩阵之间的各种关系

1. 矩阵等价

(1) 定义 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经有限次初等行变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 行等价，记作 $\boldsymbol{A}\overset{r}{\sim}\boldsymbol{B}$；若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经有限次初等列变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 列等价，记作 $\boldsymbol{A}\overset{c}{\sim}\boldsymbol{B}$；若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经有限次初等变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，记作 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

(2) 充分必要条件 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 矩阵，则

(ⅰ) $\boldsymbol{A}\overset{r}{\sim}\boldsymbol{B}$ 的充分必要条件是存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$.

(ⅱ) $\boldsymbol{A}\overset{c}{\sim}\boldsymbol{B}$ 的充分必要条件是存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{B}$.

(ⅲ) $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 的充分必要条件是存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 及 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$.

(3) 矩阵等价与矩阵的秩的关系 两个同型矩阵等价，当且仅当它们的秩相等，而两个同型矩阵的秩相等仅仅只是它们合同或者相似的必要条件.

2. 矩阵相似

(1) 定义 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，若有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，则称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的相似矩阵，或者称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似. 对 $\boldsymbol{A}$ 进行运算 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 称为对 $\boldsymbol{A}$ 进行相似变换，可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 称为把 $\boldsymbol{A}$ 变成 $\boldsymbol{B}$ 的相似变换矩阵.

(2) n 阶矩阵 A 与对角矩阵相似的判定条件

充分条件	A 有 n 个不同的特征值
	A 为实对称矩阵
充分必要条件	A 有 n 个线性无关的特征向量
	A 的每个特征值对应的线性无关的特征向量的个数等于该特征值的重数

3. 矩阵合同

(1) 定义 设 A 和 B 是 n 阶矩阵,若有可逆矩阵 C,使 $B = C^{T}AC$,则称矩阵 A 与 B 合同.

(2) 充分必要条件 两实对称矩阵 A,B 合同的充分必要条件是 A 和 B 的正、负惯性指数相同,也等价于它们具有相同的秩和正惯性指数.

(3) 实对称矩阵均合同于对角矩阵,且不可能合同于实对称矩阵以外的矩阵.

4. 等价、相似与合同的关系

对于一般矩阵来说,合同不能推出相似,而相似也不能推出合同.

$$\begin{tikzcd}
\text{相似} \arrow[rr, shift left, "/" marking] \arrow[dr, shift right] & & \text{合同} \arrow[ll, shift left, "/" marking] \arrow[dl, shift left] \\
& \text{等价} \arrow[ul, shift right, "/" marking] \arrow[ur, shift left, "/" marking] &
\end{tikzcd}$$

9 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{pmatrix}$,$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$,则线性方程组 $Ax = b$ 的解的情况为(　　)

(A) 无解.　　　　(B) 有解.

(C) 有无穷多解或无解.　　　　(D) 有唯一解或无解.

答案 D.

分析 本题主要考查线性方程组的解的情况.

本题的方程组的系数矩阵带参数,故需要分情况讨论. 但若注意到系数矩阵行列式与范德蒙德行列式有关,则有一种情况实际上是很好判断的.

范德蒙德行列式 形如 $V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$ 的 n 阶行列式被称为**范德蒙德行列式**,$V_n = \prod\limits_{n \geqslant i > j \geqslant 1} (x_i - x_j)$. 不难发现,若存在 $x_i = x_j (i \neq j)$,则 $V_n = 0$,否则 $V_n \neq 0$.

解 (法一) 注意到

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ 1 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = (b-a)(b-1)(a-1).$$

当 $a \neq 1, b \neq 1$,且 $a \neq b$ 时,$|A| \neq 0$. 由克拉默法则可知,此时方程组 $Ax = b$ 有唯一解.

当 $a=1$ 时,

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&2\\1&b&b^2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&1\\1&b&b^2&4\end{pmatrix}.$$

$r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\neq r(\boldsymbol{A})$,方程组无解. 同理可得,当 $b=1$ 时,$r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\neq r(\boldsymbol{A})$,方程组无解.

当 $a=b$ 时,

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&a&a^2&2\\1&b&b^2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&a&a^2&2\\0&0&0&2\end{pmatrix}.$$

$r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\neq r(\boldsymbol{A})$,方程组无解.

综上所述,方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解的情况只有两种可能,有唯一解或无解. 应选 D.

(法二) 直接对增广矩阵$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$作初等行变换.

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&a&a^2&2\\1&b&b^2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&a-1&a^2-1&1\\0&b-1&b^2-1&3\end{pmatrix}.$$

当 $a=b=1$ 时,$r(\boldsymbol{A})=1$,$r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=2$,方程组无解.

当 $a=1,b\neq1$ 或 $a\neq1,b=1$ 时,$r(\boldsymbol{A})=2$,$r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=3$,方程组无解.

当 $a=b$,但均不等于 1 时,$r(\boldsymbol{A})=2$,$r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=3$,方程组无解.

当 $a\neq1,b\neq1$,且 $a\neq b$ 时,$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=3$. 方程组有唯一解.

综上所述,方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解的情况只有两种可能,有唯一解或无解. 应选 D.

注 像这种系数矩阵中带参数,需要稍加讨论才能判断解的情况的方程组问题,往年真题中除了在解答题中出现过外,也在选择题中出现过.

【例】设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\d\\d^2\end{pmatrix}$. 若集合 $\Omega=\{1,2\}$,则线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充分必要条件为(　　)(2015 年数学一、二、三试题)

(A) $a\notin\Omega,d\notin\Omega$.　(B) $a\notin\Omega,d\in\Omega$.　(C) $a\in\Omega,d\notin\Omega$.　(D) $a\in\Omega,d\in\Omega$.

答案 D.

10 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(\lambda,1,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,\lambda,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,\lambda)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,\lambda,\lambda^2)^{\mathrm{T}}$,若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 等价,则 λ 的取值范围是(　　)

(A) $\{0,1\}$.　(B) $\{\lambda\mid\lambda\in\mathbf{R},\lambda\neq-2\}$.

(C) $\{\lambda\mid\lambda\in\mathbf{R},\lambda\neq-1,\lambda\neq-2\}$.　(D) $\{\lambda\mid\lambda\in\mathbf{R},\lambda\neq-1\}$.

答案 C.

分析 本题主要考查向量组等价.

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 等价的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$. 由这一条件出发,可以考虑对矩阵$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$作初等行变换并讨论秩来

得到 λ 的取值.

另一方面,也可以通过计算 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|$ 和 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4|$ 来讨论 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩. 当它们均不为 0 时,这两个向量组都是 3 维向量组的极大无关组,从而是等价的. 此外,还需讨论行列式均为 0 时两个向量组是否等价.

解 (法一) 当 $\lambda = 1$ 时,$\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. 此时 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 显然等价.

当 $\lambda \neq 1$ 时,考虑矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & \lambda & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2\\ \lambda & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - \lambda r_1]{r_2 - r_1} \begin{pmatrix}1 & \lambda & 1 & \lambda\\ 0 & 1-\lambda & \lambda - 1 & \lambda^2 - \lambda\\ 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda & 1-\lambda^2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3^* \times \frac{1}{1-\lambda}]{r_2^* \times \frac{1}{1-\lambda}} \begin{pmatrix}1 & \lambda & 1 & \lambda\\ 0 & 1 & -1 & -\lambda\\ 0 & 1+\lambda & 1 & 1+\lambda\end{pmatrix} \xrightarrow{r_3^{**} - (1+\lambda) r_2^{**}} \begin{pmatrix}1 & \lambda & 1 & \lambda\\ 0 & 1 & -1 & -\lambda\\ 0 & 0 & \lambda + 2 & (\lambda+1)^2\end{pmatrix}.$$

(r_i^* 表示对第 i 行作初等行变换后所得新的第 i 行,每作一次初等行变换,加一个 $*$.)

由于 $\boldsymbol{A}$ 有 2 阶非零子式 $\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ 1 & \lambda\end{vmatrix}$,故 $r(\boldsymbol{A}) \geqslant 2$. 另一方面,因为不存在 λ 满足 $\lambda + 2 = (\lambda+1)^2 = 0$,所以 $r(\boldsymbol{A}) = 3$.

$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3) = 3$ 当且仅当 $\lambda \neq -2$. $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4) = 3$ 当且仅当 $\lambda \neq -1$.

因此,当 $\lambda \neq 1$ 时,$r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4) = r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3) = r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 当且仅当 $\lambda \neq -2$ 且 $\lambda \neq -1$.

注意到 $\lambda = 1$ 也包含在条件 $\lambda \neq -2$ 且 $\lambda \neq -1$ 中,故 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4) = r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3) = r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 当且仅当 $\lambda \neq -2$ 且 $\lambda \neq -1$.

综上所述,应选 C.

(法二) 分别计算 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|$, $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4|$.

$$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3| = \begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda^2\\ 1 & \lambda - 1 & 1-\lambda\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(\lambda+2).$$

$$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4| = \begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & \lambda\\ 1 & 1 & \lambda^2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda^3\\ 1 & \lambda - 1 & \lambda-\lambda^2\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(1+\lambda)^2.$$

当 $\lambda \neq 1, -2, -1$ 时,$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|$ 与 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4|$ 均不为0. 此时,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为 3 维列向量组的极大无关组,从而等价.

当 $\lambda = 1$ 时,$\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. 此时 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 显然等价.

当 $\lambda = -2$ 或 $\lambda = -1$ 时,$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3| \neq |\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4|$,且其中一个为0,另一个不为0,说明两向量组的秩不相等,从而不等价.

综上所述,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 等价当且仅当 $\lambda \neq -2$ 且 $\lambda \neq -1$. 应选 C.

二、填空题

11 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)^{\cot x} =$ ______.

答案 应填$\sqrt{e}$.

分析 本题主要考查极限计算.

$\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)^{\cot x}$ 为幂指函数,且所求极限为 1^∞ 型未定式,故可以采用取对数再计算极限的方法.

解 取对数再求极限.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\cot x} = \lim_{x\to 0} e^{\cot x\ln\frac{1+e^x}{2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\cot x\ln\frac{1+e^x}{2}}.$$

下面计算$\lim\limits_{x\to 0}\cot x\ln\dfrac{1+e^x}{2}$.

$$\lim_{x\to 0}\cot x\ln\frac{1+e^x}{2} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{1+e^x}{2}}{\tan x} \xlongequal{\tan x\sim x} \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{e^x-1}{2}\right)}{x}$$

$$\xlongequal{\ln\left(1+\frac{e^x-1}{2}\right)\sim\frac{e^x-1}{2}} \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x} \xlongequal{e^x-1\sim x} \lim_{x\to 0}\frac{x}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

因此,原极限 $= e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

12 已知函数 $y = y(x)$ 由方程 $x^2 + xy + y^3 = 3$ 确定,则 $y''(1) =$ ______.

答案 应填 $-\dfrac{31}{32}$.

分析 本题主要考查隐函数的导数计算.

本题要求的是隐函数的二阶导数值,故对给定方程两端关于 x 求导两次,并代值即可.

解 将 $x = 1$ 代入原方程可得,$1 + y + y^3 = 3$,即 $y^3 + y - 2 = 0$. 通过观察可得 $y = 1$ 是该方程的一个解. 令 $f(y) = y^3 + y - 2$,则 $f'(y) = 3y^2 + 1 > 0$,$f(y)$ 为单调增加函数,从而 $y = 1$ 为 $y^3 + y - 2 = 0$ 的唯一解.

对 $x^2 + xy + y^3 = 3$ 两端关于 x 求导可得,

$$2x + y + xy' + 3y^2y' = 0, \quad 即\ 2x + y + (x + 3y^2)y' = 0. \tag{1}$$

代入 $x = 1, y(1) = 1$ 可得 $3 + 4y'(1) = 0$. 解得 $y'(1) = -\dfrac{3}{4}$.

对(1)式两端再次关于 x 求导可得,

$$2 + y' + (1 + 6yy')y' + (x + 3y^2)y'' = 0.$$

代入 $x = 1, y(1) = 1, y'(1) = -\dfrac{3}{4}$ 可得 $\dfrac{31}{8} + 4y''(1) = 0$. 解得 $y''(1) = -\dfrac{31}{32}$.

13 $\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2-x+1}\mathrm{d}x =$ ______.

答案 应填 $\frac{8\sqrt{3}\pi}{9}$.

分析 本题主要考查定积分的计算.

被积函数为有理函数,形如$\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$,其中被积函数的分母为没有实根的二次三项式,分子为一次多项式.

对此类积分,可以拆分为两种基本类型.

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\mathrm{d}x = \int \frac{(2x+p)\cdot\frac{M}{2}}{x^2+px+q}\mathrm{d}x + \int \frac{N-\frac{pM}{2}}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}\mathrm{d}x.$$

- $\frac{(2x+p)\cdot\frac{M}{2}}{x^2+px+q} \xrightarrow{\text{积分}} \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+C.$
- $\frac{N-\frac{pM}{2}}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}} \xrightarrow{\text{积分}} \frac{2\left(N-\frac{pM}{2}\right)}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$

解 注意到$(x^2-x+1)'=2x-1$,故可以将被积函数拆成两部分,$\frac{2x+3}{x^2-x+1}=\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{4}{x^2-x+1}$.

因此,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2-x+1}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x+1}\mathrm{d}x + 4\int_0^1 \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}(x^2-x+1)}{x^2-x+1} + \frac{16}{3}\int_0^1 \frac{1}{1+\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]^2}\mathrm{d}x \\ &= \ln(x^2-x+1)\Big|_0^1 + \frac{8\sqrt{3}}{3}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]}{1+\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]^2} \\ &= \frac{8\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{8\sqrt{3}}{3}\times\frac{\pi}{3} = \frac{8\sqrt{3}\pi}{9}.\end{aligned}$$

拓 展

有理函数积分是一种基本积分类型.此类题在数二真题中出现较多.
历年真题中,与本题最接近的是1999年数二的一道真题.

【例】$\int \frac{x+5}{x^2-6x+13}\mathrm{d}x =$ ______.（1999 年数学二试题）

答案　$\frac{1}{2}\ln(x^2-6x+13)+4\arctan\frac{x-3}{2}+C$，其中 C 为任意常数.

此外，以下题目也属于类似的有理函数积分.

【例】$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+8} =$ ______.（1997 年数学二试题）

答案　$\frac{\pi}{8}$.

【例】$\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x =$ ______.（2014 年数学二试题）

答案　$\frac{3\pi}{8}$.

【例】$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x =$ ______.（2021 年数学一试题）

答案　$\frac{\pi}{4}$.

【例】$\int_0^{2}\frac{2x-4}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x =$ ______.（2022 年数学三试题）

答案　$\ln 3-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$.

【例】求不定积分 $\int\frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\mathrm{d}x$.（2019 年数学二试题）

答案　$-2\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+\ln(x^2+x+1)+C$，其中 C 为任意常数.

14 微分方程 $y'''-2y''+5y'=0$ 的通解为 $y(x)=$ ______.

答案 应填 $C_1+\mathrm{e}^x(C_2\cos 2x+C_3\sin 2x)$，其中 C_1,C_2,C_3 为任意常数.

分析 本题主要考查高阶常系数齐次线性微分方程的解.

此类题的解法为，先写出特征方程，然后根据特征方程的根的情况写出通解.

解 $y'''-2y''+5y'=0$ 的特征方程为 $r^3-2r^2+5r=0$，分解因式得 $r(r^2-2r+5)=0$. 解得 $r_1=0,r_{2,3}=1\pm 2\mathrm{i}$.

根据常系数齐次线性微分方程的通解与特征方程的根的关系，可得 $y'''-2y''+5y'=0$ 的通解为 $y=C_1+\mathrm{e}^x(C_2\cos 2x+C_3\sin 2x)$，其中 C_1,C_2,C_3 为任意常数.

注 在 2021 年数二真题中，考了一道与本题完全类似的题. 连续两年在填空题中考查高阶常系数齐次线性微分方程的解这一考点，希望能够引起大家对此类方程的重视.

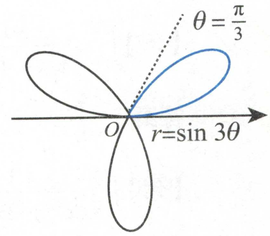
【例】微分方程 $y'''-y=0$ 的通解为 $y=$ ______.（2021 年数学二试题）

答案　$C_1\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$，其中 C_1,C_2,C_3 为任意常数.

15 已知曲线 L 的极坐标方程为 $r = \sin 3\theta\left(0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{3}\right)$，则 L 围成的有界区域的面积为______.

答案 应填 $\dfrac{\pi}{12}$.

分析 本题主要考查定积分在几何上的应用.



本题中的曲线是由极坐标形式给出的. 对于由极坐标形式 $r = r(\theta)$ $(\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta)$ 给出的封闭曲线 L，其围成的平面图形的面积为 $A = \int_\alpha^\beta \dfrac{1}{2}[r(\theta)]^2 \mathrm{d}\theta$.

如图所示，本题中的曲线 L 是“三叶玫瑰线”的一个花瓣，图中蓝色曲线为 L.

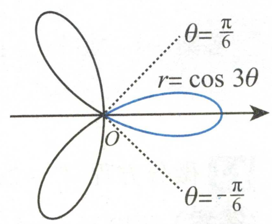
解 由面积公式得

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 3\theta)^2 \mathrm{d}\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos 6\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{24}\sin 6\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{12}.$$

注 本题中的曲线为三叶玫瑰线. 在 2013 年数二真题中，有一道与本题非常接近的题.

【例】设封闭曲线 L 的极坐标方程为 $r = \cos 3\theta\left(-\dfrac{\pi}{6} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{6}\right)$，则 L 所围平面图形的面积是______.（2013 年数学二试题）

答案 $\dfrac{\pi}{12}$.



$r = \cos 3\theta$ 的图形如右图.

实际上，由 $r = \cos 3\theta$ 逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{6}$ 即可得 $r = \sin 3\theta$，故这两段曲线围成的面积是相等的.

16 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行和第 3 行，再将第 2 列的 -1 倍加到第 1 列，得到矩阵 $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的迹 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}^{-1}) =$ ______.

答案 应填 -1.

分析 本题主要考查矩阵运算，包括矩阵的初等变换与矩阵求逆等.

写出条件中所给初等变换对应的初等矩阵，结合已知矩阵可以得到 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的表达式，从而得到 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的迹.

解 交换第 2 行和第 3 行对应左乘初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，将第 2 列的 -1 倍加到第 1 列

对应右乘初等矩阵 $\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. 记 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2&1&-1\\1&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$. 于是,$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{B}$,从而 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2^{-1}$. 由此可得,$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_1$.

下面利用初等行变换计算 $\boldsymbol{B}^{-1}$.

$$(\boldsymbol{B},\boldsymbol{E})=\begin{pmatrix}-2&1&-1&1&0&0\\1&-1&0&0&1&0\\-1&0&0&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&-1\\1&-1&0&0&1&0\\-2&1&-1&1&0&0\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&-1\\0&-1&0&0&1&1\\0&1&-1&1&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&-1\\0&-1&0&0&1&1\\0&0&-1&1&1&-1\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&-1\\0&1&0&0&-1&-1\\0&0&1&-1&-1&1\end{pmatrix}.$$

于是,$\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$.

因此,

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\-1&1&-1\end{pmatrix}.$$

进一步可得 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}^{-1})=-1$.

三、解答题

17 已知函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\mathrm{e}^{x^2})-3f(1+\sin^2x)}{x^2}=2$,求 $f'(1)$.

分析 本题主要考查导数的定义.

由函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导可得 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续,从而由给定极限式可得 $f(1)=0$,进一步可由该式凑导数定义得到 $f'(1)$ 的值.

解 由 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导可得 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续,故由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\mathrm{e}^{x^2})-3f(1+\sin^2x)}{x^2}=2$ 可得

$$\lim_{x\to0}[f(\mathrm{e}^{x^2})-3f(1+\sin^2x)]\xlongequal{f\text{连续}}-2f(1)=0.$$

于是,$f(1)=0$.

另一方面,

$$\lim_{x\to0}\frac{f(\mathrm{e}^{x^2})}{x^2}=\lim_{x\to0}\left[\frac{f(\mathrm{e}^{x^2})-f(1)}{\mathrm{e}^{x^2}-1}\cdot\frac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{x^2}\right]=\lim_{x\to0}\frac{f(\mathrm{e}^{x^2})-f(1)}{\mathrm{e}^{x^2}-1}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{x^2}$$
$$=f'(1),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin^2 x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(1+\sin^2 x)-f(1)}{(\sin^2 x+1)-1}\cdot\frac{\sin^2 x}{x^2}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin^2 x)-f(1)}{(\sin^2 x+1)-1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}$$
$$=f'(1).$$

因此，

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(e^{x^2})-3f(1+\sin^2 x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(e^{x^2})}{x^2}-3\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin^2 x)}{x^2}=f'(1)-3f'(1)$$
$$=-2f'(1)=2.$$

综上所述，$f'(1)=-1$.

注 本题中凑导数定义的做法，在 2001 年数一真题中也出现过.

【例】设 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充要条件为(　　)(2001 年数学一试题)

(A) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(1-\cos h)$ 存在.　　(B) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在.

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(h-\sin h)$ 存在.　　(D) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在.

答案　B.

18 设函数 $y(x)$ 是微分方程 $2xy'-4y=2\ln x-1$ 的满足条件 $y(1)=\frac{1}{4}$ 的解，求曲线 $y=y(x)(1\leqslant x\leqslant e)$ 的弧长.

分析 本题主要考查微分方程求解与定积分的应用.

本题中的微分方程为一阶非齐次线性微分方程，由求解公式计算并代入初值可得 $y(x)$ 的表达式，再代入曲线弧长的计算公式即可计算得弧长.

曲线弧长的计算公式　当曲线由直角坐标方程 $y=f(x)(x\in[a,b])$ 给出，且 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续导数时，弧长

$$s=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,dx.$$

解 整理原方程可得 $y'-\frac{2y}{x}=\frac{2\ln x-1}{2x}$. 这是一个一阶非齐次线性微分方程，由求解公式可得，

$$y=e^{\int\frac{2}{x}dx}\left[\int\frac{2\ln x-1}{2x}\cdot e^{-\int\frac{2}{x}dx}dx+C\right]=x^2\left[\int(2\ln x-1)\cdot\frac{1}{2}x^{-3}dx+C\right]$$
$$=x^2\left(\int\ln x\cdot x^{-3}dx-\int\frac{1}{2}x^{-3}dx+C\right)=x^2\left[\int\ln x\,d\left(-\frac{1}{2}x^{-2}\right)-\int\frac{1}{2}x^{-3}dx+C\right]$$
$$=x^2\left(-\frac{1}{2}x^{-2}\ln x+\int\frac{1}{2}x^{-2}\cdot\frac{1}{x}dx-\int\frac{1}{2}x^{-3}dx+C\right)$$
$$=Cx^2-\frac{\ln x}{2}.$$

代入 $y(1)=\frac{1}{4}$ 可得，$C=\frac{1}{4}$. 因此，$y(x)=\frac{x^2}{4}-\frac{\ln x}{2}$.

计算得 $y' = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$. 代入曲线弧长的计算公式可得

$$s = \int_1^e \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\,dx = \int_1^e \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}\,dx = \int_1^e \sqrt{\frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{x}\right)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^e \left(x + \frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + \ln x\right)\Bigg|_1^e = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

注 本题与两道往年的数二真题关系比较密切.

【例】设曲线 L 的方程为 $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x(1 \leqslant x \leqslant e)$.

（Ⅰ）求 L 的弧长；

（Ⅱ）设 D 是由曲线 L, 直线 $x = 1, x = e$ 及 x 轴所围平面图形，求 D 的形心的横坐标.（2013 年数学二试题）

答案 （Ⅰ）$\frac{e^2+1}{4}$；（Ⅱ）$\bar{x} = \frac{3(e^4 - 2e^2 - 3)}{4(e^3 - 7)}$.

两道题中的曲线 L 为同一条曲线，只是今年的试题中，需要通过解微分方程得到曲线方程.

【例】设函数 $f(x)$ 满足 $\int \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx = \frac{1}{6}x^2 - x + C$, L 为曲线 $y = f(x)(4 \leqslant x \leqslant 9)$, L 的弧长为 s, L 绕 x 轴旋转一周所形成的曲面面积为 A, 求 s 和 A.（2021 年数学二试题）

答案 $s = \frac{22}{3}, A = \frac{425\pi}{9}$.

本题与该试题在弧长的计算过程中，有比较相似的地方. 大家可以比较一下.

19 已知平面区域 $D = \{(x,y) \mid y - 2 \leqslant x \leqslant \sqrt{4 - y^2}, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$, 计算 $I = \iint\limits_D \frac{(x-y)^2}{x^2 + y^2}dxdy$.

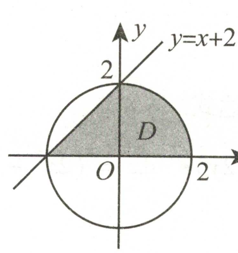
分析 本题主要考查二重积分的计算.

根据积分区域以及被积函数的特点，可以考虑在极坐标系下计算.

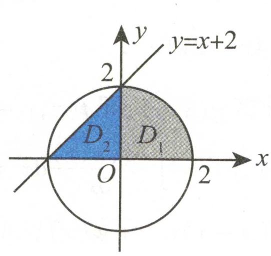
解 在极坐标系下计算.

由 D 的表达式可知，如图(a)所示，D 是由直线 $y = x + 2$, 圆 $x^2 + y^2 = 4$ 以及 x 轴围成的部分.

直线 $y = x + 2$ 在极坐标系下的表示为 $r = \frac{2}{\sin\theta - \cos\theta}$, 圆 $x^2 + y^2 = 4$ 在极坐标系下的表示为 $r = 2$.



(a)



(b)

如图(b)所示,将 D 分为两部分 D_1 和 D_2.

$$D_1 = \left\{(r,\theta)\,\middle|\,0 \leqslant r \leqslant 2, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}.$$

$$D_2 = \left\{(r,\theta)\,\middle|\,0 \leqslant r \leqslant \frac{2}{\sin\theta - \cos\theta}, \frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \pi\right\}.$$

因此,

$$\iint_D \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \xlongequal{\text{极坐标}} \iint_D \frac{r^2(\cos\theta - \sin\theta)^2}{r^2}\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \iint_D (\cos\theta - \sin\theta)^2 \cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta - \sin\theta)^2\mathrm{d}\theta\int_0^2 r\mathrm{d}r + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\cos\theta - \sin\theta)^2\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{2}{\sin\theta-\cos\theta}} r\mathrm{d}r$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 - 2\sin\theta\cos\theta)\mathrm{d}\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\cos\theta - \sin\theta)^2\cdot\frac{r^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{2}{\sin\theta-\cos\theta}}\mathrm{d}\theta$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{2} - \sin^2\theta\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\cos\theta - \sin\theta)^2\cdot\frac{2}{(\sin\theta - \cos\theta)^2}\mathrm{d}\theta$$

$$= \pi - 2 + 2\times\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 2\pi - 2.$$

20 已知可微函数 $f(u,v)$ 满足 $\frac{\partial f(u,v)}{\partial u} - \frac{\partial f(u,v)}{\partial v} = 2(u-v)\mathrm{e}^{-(u+v)}$,且 $f(u,0) = u^2\mathrm{e}^{-u}$.

(Ⅰ)记 $g(x,y) = f(x,y-x)$,求 $\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}$;

(Ⅱ)求 $f(u,v)$ 的表达式与极值.

分析 本题综合考查了二元函数的偏导数计算以及极值问题等.

第(Ⅰ)问实际上是要求 $\frac{\partial f(x,y-x)}{\partial x}$,利用链式法则计算即可.

第(Ⅱ)问中,可由第(Ⅰ)问先求得 $f(x,y-x)$ 的表达式,再通过换元 $u = x, v = y-x$ 并整理得到 $f(u,v)$ 的表达式,接下来根据二元函数极值存在的充分条件计算极值即可.

解 (Ⅰ)根据链式法则,

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y-x)}{\partial x} = f_1'(x,y-x) - f_2'(x,y-x).$$

令 $u = x, v = y-x$,并代入 $\frac{\partial f(u,v)}{\partial u} - \frac{\partial f(u,v)}{\partial v} = 2(u-v)\mathrm{e}^{-(u+v)}$ 可得

$$f_1'(x,y-x) - f_2'(x,y-x) = 2(2x-y)\mathrm{e}^{-y}.$$

因此,$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = (4x-2y)\mathrm{e}^{-y}$.

(Ⅱ)通过积分先计算 $g(x,y)$,即 $f(x,y-x)$ 的表达式.

$$f(x,y-x) = g(x,y) = \int\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x = \int(4x-2y)\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}x = (2x^2 - 2xy)\mathrm{e}^{-y} + \varphi(y)$$

$$= 2x(x-y)\mathrm{e}^{-y} + \varphi(y),$$

其中 $\varphi(y)$ 为关于 y 的一元函数.

令 $u=x, v=y-x$ 可得

$$f(u,v)=-2uve^{-(u+v)}+\varphi(u+v).$$

代入 $f(u,0)=u^2e^{-u}$ 可得 $\varphi(u)=u^2e^{-u}$. 于是,

$$f(u,v)=-2uve^{-(u+v)}+\varphi(u+v)=-2uve^{-(u+v)}+(u+v)^2e^{-(u+v)}=(u^2+v^2)e^{-(u+v)}.$$

计算 $f(u,v)$ 的驻点.

$$f'_1(u,v)=2ue^{-(u+v)}-(u^2+v^2)e^{-(u+v)}=(2u-u^2-v^2)e^{-(u+v)},$$

$$f'_2(u,v)=2ve^{-(u+v)}-(u^2+v^2)e^{-(u+v)}=(2v-u^2-v^2)e^{-(u+v)}.$$

解 $\begin{cases}2u-u^2-v^2=0,\\2v-u^2-v^2=0.\end{cases}$ 两式相减得 $u=v$, 将 $u=v$ 代入 $2u-u^2-v^2=0$ 可得 $2u-2u^2=0$, 从而 $u=0$ 或 $u=1$. $\begin{cases}u=0,\\v=0\end{cases}$ 和 $\begin{cases}u=1,\\v=1\end{cases}$ 为该方程组的两组解.

因此, 点 $(0,0)$ 和点 $(1,1)$ 为 $f(u,v)$ 的全部驻点.

计算 $f(u,v)$ 的二阶偏导数.

$$f''_{11}(u,v)=(2-2u)e^{-(u+v)}-(2u-u^2-v^2)e^{-(u+v)}=(u^2+v^2-4u+2)e^{-(u+v)},$$

$$f''_{12}(u,v)=-2ve^{-(u+v)}-(2u-u^2-v^2)e^{-(u+v)}=(u^2+v^2-2u-2v)e^{-(u+v)},$$

$$f''_{22}(u,v)=(2-2v)e^{-(u+v)}-(2v-u^2-v^2)e^{-(u+v)}=(u^2+v^2-4v+2)e^{-(u+v)}.$$

对点 $(0,0)$,

$$A=f''_{11}(0,0)=2,\quad B=f''_{12}(0,0)=0,\quad C=f''_{22}(0,0)=2.$$

由于 $AC-B^2>0$, 且 $A>0$, 故点 $(0,0)$ 为 $f(u,v)$ 的极小值点, 极小值为 $f(0,0)=0$.

对点 $(1,1)$,

$$A=f''_{11}(1,1)=0,\quad B=f''_{12}(1,1)=-2e^{-2},\quad C=f''_{22}(1,1)=0.$$

由于 $AC-B^2<0$, 故点 $(1,1)$ 不是极值点.

综上所述, $f(u,v)$ 有极小值, 极小值为 $f(0,0)=0$.

注 也可以如下计算 φ 的表达式, 从而得到 $f(u,v)$.

一方面, $g(x,x)=2x(x-x)e^{-x}+\varphi(x)=\varphi(x)$, 另一方面, $g(x,x)=f(x,0)=x^2e^{-x}$, 故 $\varphi(x)=x^2e^{-x}$. 于是,

$$f(x,y-x)=2x(x-y)e^{-y}+y^2e^{-y}.$$

令 $u=x, v=y-x$ 可得

$$f(u,v)=-2uve^{-(u+v)}+(u+v)^2e^{-(u+v)}=(u^2+v^2)e^{-(u+v)}.$$

21 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有二阶连续导数, 证明: $f''(x)\geqslant 0$ 的充分必要条件是对任意不同的实数 a,b, 都有 $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\leqslant\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 成立.

分析 本题综合考查了一元微积分中的重要概念, 包括连续性、凹凸性等.

必要性的证明要求由 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的凹函数推导出函数 $f(x)$ 在任一区间 (a,b) 中

点处的取值不超过其在区间$[a,b]$上的平均值，这一点通过几何直观是比较容易发现的. 要说明这一点，可以考虑使用$f(x)$在点$\frac{a+b}{2}$处的二阶泰勒公式，也可以考虑利用变限积分构造函数不等式.

在得到必要性的证明之后，充分性的证明可以考虑使用反证法. 因为若假设存在x_0使得$f''(x_0)<0$，则由二阶导数的连续性可得存在包含x_0的一个小区间$[a_0,b_0]$，在该小区间上$f''(x)<0$. 这样一来，类似必要性的证明，可得对任意$[a,b]\subseteq[a_0,b_0]$内，均有$f\left(\frac{a+b}{2}\right)>\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$，从而导出矛盾.

证 先证明必要性，即证明，若$f''(x)\geqslant 0$，则对任意不同的实数a,b，都有$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$成立.

(法一) 不妨设$b>a$. 在区间$[a,b]$上，使用$f(x)$在点$\frac{a+b}{2}$处的二阶泰勒公式.

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2, \qquad (1)$$

其中ξ介于x与$\frac{a+b}{2}$之间.

将(1)式代入$\int_a^b f(x)\,dx$，可得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx&=\int_a^b\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]dx\\&=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)-f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx\\&\quad+\frac{1}{2}f''(\xi)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2dx.\end{aligned}$$

注意到

$$\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx=\frac{x^2}{2}\Big|_a^b-\frac{(a+b)(b-a)}{2}=\frac{b^2-a^2}{2}-\frac{b^2-a^2}{2}=0,$$

故

$$\int_a^b f(x)\,dx=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{1}{2}f''(\xi)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2dx.$$

结合$f''(x)\geqslant 0$可得$\int_a^b f(x)\,dx\geqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$，即$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

(法二) 不妨设$b>a$. $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$等价于$f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)-\int_a^b f(x)\,dx\leqslant 0$.

令$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt-f\left(\frac{a+x}{2}\right)(x-a)$，$x\in[a,b]$，则$F(a)=0$，且

$$\begin{aligned}F'(x)&=f(x)-f\left(\frac{a+x}{2}\right)-f'\left(\frac{a+x}{2}\right)\frac{x-a}{2}\xlongequal[\text{中值定理}]{\text{拉格朗日}}f'(\xi)\frac{x-a}{2}-f'\left(\frac{a+x}{2}\right)\frac{x-a}{2}\\&=\left[f'(\xi)-f'\left(\frac{a+x}{2}\right)\right]\frac{x-a}{2},\end{aligned}$$

其中$\xi \in \left(\frac{a+x}{2},x\right)$.

由于$f''(x)\geqslant 0$,故$f'(x)$单调不减,从而$f'(\xi)\geqslant f'\left(\frac{a+x}{2}\right)$,即$f'(\xi)-f'\left(\frac{a+x}{2}\right)\geqslant 0$. 于是,对$x\in(a,b)$,$F'(x)\geqslant 0$,$F(x)$在$[a,b]$上单调不减.

又因为$F(a)=0$,所以$F(b)\geqslant F(a)=0$,即$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$.

下面证明充分性,即证明,若对任意不同的实数a,b,都有$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$成立,则$f''(x)\geqslant 0$.

假设存在x_0,使得$f''(x_0)<0$,由二阶导数连续可得$\lim\limits_{x\to x_0}f''(x)=f''(x_0)<0$,结合极限的局部保号性可知,存在$\delta>0$,在区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$内,均有$f''(x)<0$. 从而取$[a_0,b_0]\subset(x_0-\delta,x_0+\delta)$,可得在$[a_0,b_0]$上,均有$f''(x)<0$.

在区间$[a_0,b_0]$上重复必要性中的做法.

$$\begin{aligned}\int_{a_0}^{b_0}f(x)\mathrm{d}x &= \int_{a_0}^{b_0}\left[f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right)+f'\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right)\left(x-\frac{a_0+b_0}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{a_0+b_0}{2}\right)^2\right]\mathrm{d}x\\ &= f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right)(b_0-a_0)-f'\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right)\int_{a_0}^{b_0}\left(x-\frac{a_0+b_0}{2}\right)\mathrm{d}x\\ &\quad+\frac{1}{2}f''(\xi)\int_{a_0}^{b_0}\left(x-\frac{a_0+b_0}{2}\right)^2\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

其中ξ介于x与$\frac{a_0+b_0}{2}$之间.

于是,

$$\int_{a_0}^{b_0}f(x)\mathrm{d}x=f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right)(b_0-a_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)\int_{a_0}^{b_0}\left(x-\frac{a_0+b_0}{2}\right)^2\mathrm{d}x.$$

结合$f''(x)<0$可得$\int_{a_0}^{b_0}f(x)\mathrm{d}x<f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right)(b_0-a_0)$,即$f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right)>\frac{1}{b_0-a_0}\int_{a_0}^{b_0}f(x)\mathrm{d}x$. 这与前提矛盾.

因此,假设不正确. $f''(x)$在$(-\infty,+\infty)$上恒非负.

综上所述,$f''(x)\geqslant 0$的充分必要条件是对任意不同的实数a,b,都有$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$成立.

注 本题的结论具有比较强的几何直观. 实际上,本题中的必要性,在2018年的数二、数三真题中出现过选择题.

【例】设函数$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导,且$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$,则(　　)(2018年数学二、三试题)

(A) 当 $f'(x)<0$ 时，$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$.　　(B) 当 $f''(x)<0$ 时，$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$.

(C) 当 $f'(x)>0$ 时，$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$.　　(D) 当 $f''(x)>0$ 时，$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$.

答案　D.

22 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+4x_2^2+3x_3^2+2x_1x_3$.

(Ⅰ) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形；

(Ⅱ) 证明 $\min\limits_{x\neq 0}\dfrac{f(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}=2$.

分析　本题主要考查二次型在正交变换下的标准形及其应用.

第(Ⅰ)问较常规，写出 f 对应的对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，计算 $\boldsymbol{A}$ 的一组线性无关的特征向量并单位正交化即可.

注意到

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}\xlongequal{\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{E}}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y},$$

即正交变换并不改变向量的长度，故可以利用第(Ⅰ)问所得标准形讨论 $\dfrac{f(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}$ 的值.

解　(Ⅰ) 由 f 的表达式可得 f 对应的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&1\\0&4&0\\1&0&3\end{pmatrix}$.

计算 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式.

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3&0&-1\\0&\lambda-4&0\\-1&0&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-4)[(\lambda-3)^2-1]=(\lambda-4)^2(\lambda-2).$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 4,4,2.

分别计算 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 4 和 2 的特征向量.

考虑 $(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

$$4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 4 的两个线性无关的特征向量.

考虑 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

$$2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&-2&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{\xi}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$为 A 的属于特征值 2 的一个特征向量.

由于 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 相互正交,故只需将它们各自单位化即可得一组相互正交的单位特征向量.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \frac{\boldsymbol{\xi}_1}{\|\boldsymbol{\xi}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \frac{\boldsymbol{\xi}_2}{\|\boldsymbol{\xi}_2\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\varepsilon}_3 = \frac{\boldsymbol{\xi}_3}{\|\boldsymbol{\xi}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)$,可得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ} = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,即正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Qy}$ 将二次型 f 化为标准形 $4y_1^2 + 4y_2^2 + 2y_3^2$.

(Ⅱ)由第(Ⅰ)问可知,在正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Qy}$ 下,$f(x_1,x_2,x_3)$ 的标准形为 $4y_1^2 + 4y_2^2 + 2y_3^2$. 又因为

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{Qy})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Qy} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Qy} \xlongequal{\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{E}} \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2,$$

所以对 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$,

$$\frac{f(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}} \xlongequal{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Qy}} \frac{4y_1^2 + 4y_2^2 + 2y_3^2}{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} \geqslant \frac{2y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2}{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} = 2.$$

因此,$\min\limits_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \dfrac{f(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}} = 2$.

注 实际上,由第(Ⅱ)问的方法,我们还可以得到$\max\limits_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \dfrac{f(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}} = 4$.

$$\frac{f(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}} \xlongequal{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Qy}} \frac{4y_1^2 + 4y_2^2 + 2y_3^2}{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} \leqslant \frac{4y_1^2 + 4y_2^2 + 4y_3^2}{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} = 4.$$

2022 年全国硕士研究生招生考试数学(二) 答案速查

一、选择题

(1)C.　(2)D.　(3)B.　(4)C.　(5)A.　(6)D.　(7)A.　(8)B.　(9)D.　(10)C.

二、填空题

(11) $\sqrt{e}$.　(12) $-\frac{31}{32}$.　(13) $\frac{8\sqrt{3}\pi}{9}$.

(14) $C_1 + e^x(C_2\cos 2x + C_3\sin 2x)$,其中 C_1,C_2,C_3 为任意常数.　(15) $\frac{\pi}{12}$.　(16) -1.

三、解答题

(17) -1.

(18) $\frac{e^2+1}{4}$.

(19) $I = 2\pi - 2$.

(20) (Ⅰ) $(4x-2y)e^{-y}$;

(Ⅱ) $f(u,v)$ 的表达式为 $(u^2+v^2)e^{-(u+v)}$,该函数有极小值,极小值为 $f(0,0)=0$.

(21) 证明略.

(22) (Ⅰ) $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$,正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将二次型 f 化为标准形 $4y_1^2 + 4y_2^2 + 2y_3^2$;

(Ⅱ) 证明略.