一、选择题:1~10 小题,每小题 5 分,共 50 分,下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的，请将所选选项前的字母填在答题卡指定位置.

(1) 当$x\to 0$时，$\alpha(x),\beta(x)$是非零无穷小量，给出以下四个命题：

①若$\alpha(x)\sim\beta(x)$ ，则$\alpha^2(x)\sim\beta^2(x)$

②若$\alpha^2(x)\sim\beta^2(x)$，则$\alpha(x)\sim\beta(x)$

③若$\alpha(x)\sim\beta(x)$ ，则$\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))$

④若$\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))$，则$\alpha(x)\sim\beta(x)$

其中正确的序号是(　　)

(A) ①②　　(B) ①④　　(C) ①③④　　(D) ②③④

(2) 已知$a_n=\sqrt[n]{n}-\frac{(-1)^n}{n}(n=1,2,\cdots)$ ，则$\{a_n\}$(　　)

(A) 有最大值，有最小值　　(B) 有最大值，没有最小值

(C) 没有最大值，有最小值　　(D) 没有最大值，没有最小值

(3) 设函数$f(t)$连续，令$F(x,y)=\int_0^{x-y}(x-y-t)f(t)dt$，则 (　　)

(A) $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial^2 x}=\frac{\partial^2 F}{\partial^2 y}$　　(B) $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial^2 x}=-\frac{\partial^2 F}{\partial^2 y}$

(C) $\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial^2 x}=\frac{\partial^2 F}{\partial^2 y}$　　(D) $\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial^2 x}=-\frac{\partial^2 F}{\partial^2 y}$

(4) 已知$I_1=\int_0^1\frac{x}{2(1+\cos x)}dx,\ I_2=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+\cos x}dx,\ I_3=\int_0^1\frac{2x}{1+\sin x}dx$,则(　　)

(A) $I_1<I_2<I_3$　　(B) $I_2<I_1<I_3$

(C) $I_1<I_3<I_2$　　(D) $I_3<I_2<I_1$

(5) 设A为3阶矩阵，$\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则$A$特征值为1，−1，0的充分必要条件是(　　)

(A) 存在可逆矩阵P,Q,使得$A=P\Lambda Q$

(B) 存在可逆矩阵P,使得$A=P\Lambda P^{-1}$

(C) 存在正交矩阵 Q,使得 $A=Q\Lambda Q^{-1}$

(D) 存在可逆矩阵 P,使得 $A=P\Lambda P^{T}$

(6) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 4\end{pmatrix}$,则线性方程组 $Ax=b$解的情况为(　　)

(A) 无解　　(B) 有解　　(C) 有无穷多解或无解　　(D) 有唯一解或无解

(7) 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}\lambda\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\ \lambda\\ 1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ \lambda\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\ \lambda\\ \lambda^2\end{pmatrix}$.若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 等价，则 λ 的取值范围是(　　)

(A) $\{0,1\}$　　(B) $\{\lambda|\lambda\in R,\lambda\neq-2\}$　　(C) $\{\lambda|\lambda\in R,\lambda\neq-1,\lambda\neq-2\}$　　(D) $\{\lambda|\lambda\in R,\lambda\neq-1\}$

(8) 设随机变量 $X\sim N(0,4)$，随机变量 $Y\sim B\left(3,\frac{1}{3}\right)$，且 X 与 Y 不相关，则 $D(X-3Y+1)=$(　　)

(A) 2　　(B) 4　　(C) 6　　(D) 10

(9) 设随机变量序列 $X_1,X_2,\ldots,X_n,\ldots$ 独立同分布，且 X_1 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}1-|x|, & |x|<1\\ 0, & 其他\end{cases}$，则当 $n\to\infty$时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于(　　)

(A) $\frac{1}{8}$　　(B) $\frac{1}{6}$　　(C) $\frac{1}{3}$　　(D) $\frac{1}{2}$

(10) 设二维随机变量 (X,Y) 的概率分布

X \ Y	0	1	2
-1	0.1	0.1	b
1	a	0.1	0.1

若事件 $\{\max\{X,Y\}=2\}$ 与事件 $\{\min\{X,Y\}=1\}$ 相互独立，则 $Cov(X,Y)=$(　　)

(A) -0.6　　(B) -0.36　　(C) 0　　(D) 0.48

二、填空题:11~16 小题,每小题 5 分,共 30 分.

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\cot x}=$_______.

(12) $\int_0^2\frac{2x-4}{x^2+2x+4}dx=$_______.

(13) 已知函数 $f(x)=e^{\sin x}+e^{-\sin x}$，则 $f'''(2\pi)=$_________.

(14) 已知函数 $f(x)=\begin{cases} e^x, & 0\le x\le 1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$，则 $\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)f(y-x)dy=$________.

(15) 设 A 为 3 阶矩阵，交换 A 的第 2 行和第 3 行，再将第 2 列的 -1 倍加到第 1 列，得到矩阵 $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 A^{-1} 的迹 $tr\left(A^{-1}\right)=$_________.

(16) 设 A,B,C 为随机事件，且 A 与 B 互不相容，A 与 C 互不相容，B 与 C 相互独立，$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$，则 $P\left(B\cup C|A\cup B\cup C\right)=$________.

三、解答题:17～22 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17) (本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'+\frac{1}{2\sqrt{x}}y=2+\sqrt{x}$ 满足条件 $y(1)=3$ 的解，求曲线 $y=y(x)$ 的渐近线.

(18) (本题满分 12 分)

设某产品的产量 Q 由资本投入量 x 和劳动投入量 y 决定，生产函数为 $Q=12x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}}$，该产品的销售单价 P 与 Q 的关系为 $P=1160-1.5Q$，若单位资本投入和单位劳动投入的价格分别为 6 和 8，求利润最大时的产量.

(19) (本题满分 12 分)

已知平面区域 $D=\left\{(x,y)\,|\,y-2\le x\le\sqrt{4-y^2},0\le y\le 2\right\}$,计算 $I=\iint\limits_D\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(20) (本题满分 12 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n+1}{4^n(2n+1)}x^{2n}$ 的收敛域及和函数 $S(x)$.

(21) (本题满分 12 分)

已知二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=3x_1^2+4x_2^2+3x_3^2+2x_1x_3$，

(1) 求正交变换 $x=Qy$ 将 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ 化为标准型；

(2) 证明：$\min\frac{f(x)}{x^Tx}=2$.

(22) (本题满分 12 分)

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自均值为 θ 的指数分布总体的简单随机样本，$Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ 为来自均值为 2θ 的指数分布总体的简单随机样本，且两样本相互独立，其中 $\theta(\theta > 0)$ 是未知参数.利用样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n, Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$，求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$，并求 $D(\hat{\theta})$.

一、选择题：1~10 小题, 每小题 5 分，共 50 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是最符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1. 当$x\to 0$时，$\alpha(x)$，$\beta(x)$是非零无穷小量，给出以下四个命题：

①若$\alpha(x)\sim\beta(x)$，则$\alpha^2(x)\sim\beta^2(x)$；

②若$\alpha^2(x)\sim\beta^2(x)$，则$\alpha(x)\sim\beta(x)$；

③若$\alpha(x)\sim\beta(x)$，则$\alpha(x)-\beta(x)\sim o\left(\alpha(x)\right)$；

④若$\alpha(x)-\beta(x)\sim o\left(\alpha(x)\right)$，则$\alpha(x)\sim\beta(x)$，

其中所有真命题的序号是(　　).

A. ①②　　B. ①④　　C. ①③④　　D. ②③④

【答案】D.

【解析】取$\alpha(x)=1-\cos x$，$\beta(x)=\dfrac{1}{2}x^2$，排除①，故选 D.

2. 已知$a_n=\sqrt[n]{n}-\dfrac{(-1)^n}{n}(n=1,2,\cdots)$，则$\{a_n\}$(　　).

A. 有最大值，有最小值　　B. 有最大值，没有最小值

C. 没有最大值，有最小值　　D. 没有最大值，没有最小值

【答案】

【解析】当n为偶数时，

$a_n=\sqrt[n]{n}-\dfrac{1}{n}$；

当n为奇数时，$a_n=\sqrt[n]{n}+\dfrac{1}{n}$；

3. 设函数$f(t)$连续，令$F(x,y)=\int_0^{x-y}(x-y-t)f(t)\mathrm{d}t$，则(　　).

A. $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ B. $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

C. $\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ D. $\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

【答案】C.

【解析】由于

$$F(x,y)=\int_0^{x-y}(x-y-t)f(t)\mathrm{d}t=(x-y)\int_0^{x-y}f(t)\mathrm{d}t-\int_0^{x-y}tf(t)\mathrm{d}t,$$

故

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\int_0^{x-y}f(t)\mathrm{d}t+(x-y)f(x-y)-(x-y)f(x-y)=\int_0^{x-y}f(t)\mathrm{d}t,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-\int_0^{x-y}f(t)\mathrm{d}t-(x-y)f(x-y)+(x-y)f(x-y)=-\int_0^{x-y}f(t)\mathrm{d}t,$$

进而$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=f(x-y)$，$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=f(x-y)$，故选 C.

4. 设$I_1=\int_0^1\frac{x}{2(1+\cos x)}\mathrm{d}x$，$I_2=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+\cos x}\mathrm{d}x$，$I_3=\int_0^1\frac{2x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$，则

A. $I_1<I_2<I_3$. B. $I_3<I_1<I_2$.

C. $I_2<I_1<I_3$. D. $I_2<I_1<I_3$.

【答案】A.

【解析】由于$0<x<1$，$\frac{x}{2}<\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x,$ 所以

$$\frac{x}{2(1+\cos x)}<\frac{\ln(1+x)}{1+\cos x}<\frac{x}{1+\cos x}<\frac{2x}{1+\cos x}<\frac{2x}{1+\sin x},\quad I_1<I_2<I_3$$

5. 设$\boldsymbol{A}$为三阶矩阵，$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{A}$的特征值为$1,-1,0$的充分必要条件是( ).

(A)存在可逆矩阵$\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$，使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda Q}$ (B)存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$

(C) 存在正交矩阵$\boldsymbol{Q}$，使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q\Lambda Q}^{-1}$ (D)存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{\mathrm{T}}$

【答案】(B)

【解析】相似矩阵有相同的特征多项式，因此特征值相同，这里$\boldsymbol{A}$的特征值为$1,-1,0$，若$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{\Lambda}$相似则二者的特征值相同，相似即存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$.

若$\boldsymbol{A}$的特征值为$1,-1,0$，由于$\boldsymbol{A}$为三阶矩阵，因此$\boldsymbol{A}$可以相似对角化为$\boldsymbol{\Lambda}$，$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{\Lambda}$相似.

6. 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a&a^2\\1&b&b^2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$，则线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$解的情况为(　　).

(A)无解　　(B)有解　　(C)有无穷多解或无解　　(D)有唯一解或无解

【答案】(D)

【解析】考虑增广阵$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&a&a^2&2\\1&b&b^2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&a-1&a^2-1&1\\0&b-1&b^2-1&3\end{pmatrix}$.

若$a=b$且$a=1$，则$r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=2>r(\boldsymbol{A})=1$，线性方程组无解；

若$a=b$且$a\neq1$，则$r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=3>r(\boldsymbol{A})=2$，线性方程组无解.

若$a\neq b$且$a\neq1$，则$r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{A})=3$，线性方程解唯一，对称的有$a\neq b$且$b\neq1$，则$r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=r(\boldsymbol{A})=3$，线性方程解唯一.

若$a\neq b$且$a=1$，则$r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=3>r(\boldsymbol{A})=2$，线性方程组无解，对称的有$a\neq b$且$b=1$，则$r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=3>r(\boldsymbol{A})=2$，线性方程组无解.

因此线性方程组有唯一解或无解

7. 设$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}\lambda\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\\lambda\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix}$，若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$等价，则$\lambda\in$(　　).

A. $\{\lambda\mid\lambda\in\mathbb{R}\}$　　B. $\{\lambda\mid\lambda\in\mathbb{R},\lambda\neq-1\}$

C. $\{\lambda\mid\lambda\in\mathbb{R},\lambda\neq-1,\lambda\neq-2\}$　　D. $\{\lambda\mid\lambda\in\mathbb{R},\lambda\neq-2\}$

【答案】C

【解析】由于

$$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^3-3\lambda+2=(\lambda-1)^2(\lambda+2),$$

$$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & \lambda\\ 1 & 1 & \lambda^2\end{vmatrix}=\lambda^4-2\lambda^2+1=(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2.$$

当$\lambda=1$时，$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，此时$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$等价.

当$\lambda=-2$时，$2=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)<r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)=3$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$不等价.当$\lambda=-1$时，$3=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)>r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)=1$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$不等价.因此当$\lambda=-2$或$\lambda=-1$时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$不等价等价，所以$\lambda$的取值范围为$\{\lambda\,|\,\lambda\in\mathbb{R},\lambda\neq-1,\lambda\neq-2\}$.

8. 设随机变量$X\sim N(0,4)$，随机变量$Y\sim B\left(3,\dfrac{1}{3}\right)$，且$X$与$Y$不相关，则

$D(X-3Y+1)=($　　$)$.

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 10

【答案】D.

【解析】由题知，$D(X)=4$，$D(Y)=3\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}$，则

$$D(X-3Y+1)=D(X-3Y),$$

因为X与Y不相关，故

$$D(X-3Y+1)=D(X-3Y)=D(X)+9D(Y)=4+9\cdot\frac{2}{3}=10$$

故选 D.

9. 设随机变量序列$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$独立同分布，且$X_1$的概率密度为

$f(x)=\begin{cases}1-|x|, & |x|<1,\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$ 则当$n\to\infty$时，$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$依概率收敛于(　　).

(A) $\dfrac{1}{8}$　　(B) $\dfrac{1}{6}$　　(C) $\dfrac{1}{3}$　　(D) $\dfrac{1}{2}$

【答案】(B)

【解析】由已知随机变量序列$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$独立同分布，则$X_1^2,X_2^2,\cdots,X_n^2,\cdots$亦独立同分布，根据辛钦大数定律，当$n\to\infty$时，$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$依概率收敛于$E\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2\right)=E(X^2)$.

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}x^2(1-|x|)\mathrm{d}x=2\int_0^1x^2(1-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{6},$$

故选(B).

10. 设二维随机变量(X,Y)的概率分布为

Y \ X	0	1	2
-1	0.1	0.1	b
1	a	0.1	0.1

若事件$\{\max(X,Y)=2\}$与事件$\{\min(X,Y)=1\}$相互独立，则$\mathrm{Cov}(X,Y)=($　　$)$.

A. -0.6　　B. -0.36　　C. 0　　D. 0.48

【答案】B.

【解析】令事件$A=\{\max(X,Y)=2\}$，事件$B=\{\min(X,Y)=1\}$，则

$$P(A)=P\{X=-1,Y=2\}+P\{X=1,Y=2\}=0.1+b,$$

$$P(B)=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=1,Y=2\}=0.1+0.1=0.2,$$

$$P(AB)=P\{X=1,Y=2\}=0.1$$

由于事件A与事件B相互独立，故$P(AB)=P(A)P(B)$，即

$$0.2(0.1+b)=0.02+0.2b=0.1,$$

由分布律的性质可知

$$0.4+a+b=1,$$

综上，解得$a=0.2$，$b=0.4$，则(X,Y)的概率分布为

Y \ X	0	1	2	
-1	0.1	0.1	0.4	0.6
1	0.2	0.1	0.1	0.4
	0.3	0.2	0.5	

$$E(X)=0.4-0.6=-0.2,\quad E(Y)=0.2+1=1.2,$$

$$E(XY)=0\cdot0.3+(-1)\cdot0.1+(-2)\cdot0.4+1\cdot0.1+2\cdot0.1=-0.6$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-0.6+0.24=-0.36,$$

故选 B.

二、填空题：11~16 小题，每小题 5 分，共 30 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

11. 极限$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)^{\cot x}=$________.

【答案】$e^{\frac{1}{2}}$

【解析】原式$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\tan x}\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\tan x}\ln\left(1+\frac{e^x-1}{2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\tan x}\cdot\frac{e^x-1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}$.

12. 积分$\displaystyle\int_0^2\frac{2}{x^2+2x+4}dx=$________.

【答案】$\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$

13. 13.已知函数$f(x)=e^{\sin x}+e^{-\sin x}$，则$f'''(2\pi)=$________

【解析】由于 $f(x)=e^{\sin x}+e^{-\sin x}$ 为周期为 2π 的偶函数，求导不改变周期，只改变奇偶性，

故 $f'''(x)$ 为周期为 2π 的奇函数，所以 $f'''(2\pi)=f'''(0)=0$.

14.已知函数 $f(x)=\begin{cases} e^x, & 0\le x\le 1, \\ 0, & 其他, \end{cases}$ 则 $\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)f(y-x)dy=$________.

【解析】由题可得积分区域

$D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1,0\le y-x\le 1\right\}=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1,x\le y\le x+1\right\}$,

$\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)f(y-x)dy=\iint\limits_D e^x\cdot e^{y-x}dxdy=\int_0^1 dx\int_x^{x+1}e^y dy=e^2-2e+1$.

15. 设 A 为 3 阶矩阵，交换 A 的第二行和第三行，再将第二列的 -1 倍加到第一列，得到矩阵 $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 A^{-1} 的迹 $\mathrm{tr}(A^{-1})=$__________.

【答案】-1

【解析】设 $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 按照上述初等变换的逆变换将 B 的第二列的 1 倍加到第一列，然后交换 B 的二,三行位置，得到 $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$，于是 $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,因此 $\mathrm{tr}(A^{-1})=-1$

16. 设 A,B,C 满足 A,B 互不相容，A,C 互不相容，B,C 相互独立，

$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$，则 $P[(B\cup C)|(A\cup B\cup C)]=$__________.

【答案】$\frac{5}{8}$

【解析】由题知，$P(AB)=0$，$P(AC)=0$，$P(BC)=P(B)P(C)=\frac{1}{9}$，

所求概率由条件概率公式得：

$$P[(B\cup C)|(A\cup B\cup C)]$$
$$=\frac{P[(B\cup C)\cap(A\cup B\cup C)]}{P(A\cup B\cup C)}$$

$$=\frac{P(\varnothing\cup B\cup C)}{P(A\cup B\cup C)}=\frac{P(B\cup C)}{P(A\cup B\cup C)}$$

$$=\frac{P(B)+P(C)-P(BC)}{P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)}$$

$$=\frac{P(B)+P(C)-P(BC)}{P(A)+P(B)+P(C)-P(BC)},$$

将 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$，$P(BC)=P(B)P(C)=\frac{1}{9}$ 代入得

$$P[(B\cup C)\mid(A\cup B\cup C)]=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{5}{8}.$$

三、解答题：17~22 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本题满分 10 分）

设 $y=y(x)$ 满足 $y'+\frac{1}{2\sqrt{x}}y=2+\sqrt{x}, y(1)=3,$ 求 $y(x)$ 渐近线.

【解析】由题意可得

$$y(x)=e^{-\sqrt{x}}\left(2xe^{\sqrt{x}}+C\right).$$

又 $y(1)=3$，有 $C=e$. 故

$$y(x)=e^{-\sqrt{x}}\left(2xe^{\sqrt{x}}+e\right).$$

设 $y(x)$ 的渐近线方程为 $y=kx+b$，

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2xe^{\sqrt{x}}+e}{xe^{\sqrt{x}}}=2,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}y(x)-2x=\lim_{x\to\infty}\frac{2xe^{\sqrt{x}}-e}{e^{\sqrt{x}}}-2x=0,$$

因此 $y(x)$ 的斜渐近线为 $y=2x$.

18.（本题满分 12 分）

设某产品的产量 Q 由资本投入量 x 和劳动投入量 y 决定，生产函数为 $Q=12x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}}$，该产品的销售单价 P 与 Q 的关系为 $P=1160-1.5Q$, 若单位资本投入和单位劳动投入的价

格分别为6和8，求利润最大时的产量.

19.（本题满分 12 分）

设 $D=\left\{(x,y)\middle|-2+y\leq x\leq\sqrt{4-y^2},0\leq y\leq 2\right\}$,求二重积分 $I=\iint\limits_D\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}dxdy$.

【解析】$I=\iint\limits_D\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2+y^2}dxdy=\iint\limits_D\left[1-\frac{2xy}{x^2+y^2}\right]dxdy=\iint\limits_D dxdy-\iint\limits_D\frac{2xy}{x^2+y^2}dxdy$

$$=\pi+2-\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}}^{2}\frac{2\rho^2\cos\theta\sin\theta}{\rho^2}\rho d\rho$$

$$=\pi+2-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta d\theta+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta\sin\theta}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}d\theta$$

$$=\pi+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta\sin\theta}{1+2\cos\theta\sin\theta}d\theta=\pi+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan\theta}{\tan^2\theta+2\tan\theta+1}d\theta$$

$$=\pi+4\int_0^{+\infty}\frac{t}{(t+1)^2}\cdot\frac{1}{1+t^2}dt=\pi+4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{(t+1)^2}\right]dt$$

$$=\pi+2\arctan t\Big|_0^{+\infty}+2\frac{1}{1+t}\Big|_0^{+\infty}=\pi+\pi-2=2\pi-2.$$

20.（本题满分 12 分）

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n+1}{4^n(2n+1)}x^{2n}$ 的收敛域及和函数 $S(x)$.

【解】由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-4)^{n+1}+1}{4^{n+1}(2n+3)}x^{2n+2}}{\frac{(-4)^n+1}{4^n(2n+1)}x^{2n}}\right|=x^2<1,$$

可得收敛区间$(-1,1)$.

当 $x=\pm1$ 时，因为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n+1}{4^n(2n+1)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2n+1}+\frac{1}{4^n(2n+1)}\right)$ 收敛，所以所求收敛域为 $[-1,1]$.

令 $S_1(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}x^{2n},S_2(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n(2n+1)}x^{2n}$,则有

$$S_1(x)=\begin{cases}\dfrac{\arctan x}{x} & ,x\neq 0\\ 1 & ,x=0\end{cases}.$$

$$S_2(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x}\ln\dfrac{2+x}{2-x} & ,x\neq 0\\ 1 & ,x=0\end{cases}.$$

综上所求和函数

$$S(x)=S_1(x)+S_2(x)=\begin{cases}\dfrac{\arctan x}{x}+\dfrac{2}{x}\ln\dfrac{2+x}{2-x} & ,x\neq 0\\ 2 & ,x=0\end{cases}$$ .21. （本题满分 12 分）

21. （本题满分 12 分）

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+4x_2^2+3x_3^2+2x_1x_3$.

(1)求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，使得 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形

(2)证明：$\min\limits_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}\dfrac{f(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}=2$.

【解】(1)据题意，二次型 f 对应的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&1\\0&4&0\\1&0&3\end{pmatrix}$.

$$由|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}3-\lambda&0&1\\0&4-\lambda&0\\1&0&3-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-2)(\lambda-4)^2=0,$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,4,4$.

当 $\lambda_1=2$ 时，解 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得 $\lambda_1=2$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_2=\lambda_3=4$ 时，解 $(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得 $\lambda_2=\lambda_3=4$ 对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$.

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 已互相正交，故只需将其单位化，得

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\gamma}_3=(0,1,0)^{\mathrm{T}}.$$

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)$，经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，将 f 化为标准形 $2y_1^2+4y_2^2+4y_3^2$.

(2) 由 (1) 得，$f(x_1,x_2,x_3)\xlongequal{x=Qy}f(y_1,y_2,y_3)=2y_1^2+4y_2^2+4y_3^2$，而

$$2(y_1^2+y_2^2+y_3^2)\le 2y_1^2+4y_2^2+4y_3^2\le 4(y_1^2+y_2^2+y_3^2),$$

故 $2\le\dfrac{2y_1^2+4y_2^2+4y_3^2}{y_1^2+y_2^2+y_3^2}\le 4\ (y_1,y_2,y_3\ne 0)$.

因此，$\min\limits_{x\ne 0}\dfrac{f(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}\xlongequal{x=Qy}\min\limits_{y\ne 0}\dfrac{f(\boldsymbol{y})}{(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}}=\min\limits_{y\ne 0}\dfrac{f(\boldsymbol{y})}{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}}=\min\limits_{y\ne 0}\dfrac{f(\boldsymbol{y})}{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}}=2$.

22.（本题满分 12 分）

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自期望为 θ 的指数分布的简单随机样本，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$ 是来自期望为 2θ 的指数分布的简单随机样本，且 $X_1,X_2,\cdots,X_n,Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$ 相互独立，求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$，及 $D(\hat{\theta})$.

【解析】由已知 $E(X)=\theta=\dfrac{1}{\lambda_1}\Rightarrow\lambda_1=\dfrac{1}{\theta}$, $E(Y)=2\theta=\dfrac{1}{\lambda_2}\Rightarrow\lambda_2=\dfrac{1}{2\theta}$,

所以总体 $X\sim E\left(\dfrac{1}{\theta}\right)$, $Y\sim E\left(\dfrac{1}{2\theta}\right)$，从而可得

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\theta}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2\theta}}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m$ 为样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n,Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$ 的观测值，且样本相互独立，则似然函数为

$$L(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^m}\dfrac{1}{\theta^{n+m}}\mathrm{e}^{-\frac{2\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{j=1}^{m}y_j}{2\theta}}, & x_i,y_j>0(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m),\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

当 $x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m>0$ 时，似然函数两边取对数

$$\ln L(\theta)=-m\ln 2-(n+m)\ln\theta-\frac{2\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+\sum\limits_{j=1}^{m}y_j}{2\theta},$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=-\dfrac{n+m}{\theta}+\dfrac{2\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+\sum\limits_{j=1}^{m}y_j}{2\theta^2}=0$，解得 $\theta=\dfrac{2\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+\sum\limits_{j=1}^{m}y_j}{2(n+m)}$,

故θ的最大似然估计量为$\hat{\theta}=\dfrac{2\sum\limits_{i=1}^{n}X_i+\sum\limits_{j=1}^{m}Y_j}{2(n+m)}$.

由$X\sim E\left(\dfrac{1}{\theta}\right)$, $Y\sim E\left(\dfrac{1}{2\theta}\right)$，则$D(X)=\theta^2, D(Y)=4\theta^2$,

则$D(\hat{\theta})=\dfrac{1}{4(n+m)^2}D\left(2\sum\limits_{i=1}^{n}X_i+\sum\limits_{j=1}^{m}Y_j\right)=\dfrac{1}{4(n+m)^2}(4n\cdot\theta^2+m\cdot 4\theta^2)=\dfrac{\theta^2}{n+m}$.